Зоран Каделбург • Владимир Мићић
Срђан Огњановић • Соња Чукић

# Анализа са алгебром

# 3

Додатак уџбенику
за III разред Математичке гимназије

# Садржај

# ПРЕДГОВОР

Последњих година се у Математичкој гимназији у Београду у свакој генерацији формира посебно одељење ученика који су својим резултатима показали да желе и могу да савладају више од онога што је редовним програмом математичких предмета предвиђено. За таква одељења се организује и посебна, менторска настава на којој ученици, подељени у мање групе, имају прилику да упознају додатне садржаје и решавају теже задатке.

Могућности рада са тако одабраним ученицима су врло велике и разноврсне, како на стандардним, тако и на менторским часовима. Природно је да се указала потреба да се припреми и понуди у писаном облику материјал који би ученицима и наставницима послужио као оријентир у избору одговарајућег градива.

У овом додатку уџбенику Анализе с алгебром за 3. разред покушали смо да презентујемо један могући избор таквог материјала. Такође, један број тежих задатака из ранијих издања уџбеника, посебно оних такмичарских, нашао је место у овом додатку.

Наравно, сасвим је могуће да наставници изаберу неке друге теме које ће обрађивати; посебно је пожељно да до таквих тема дођу у договору са самим ученицима на основу њиховог испољеног интересовања. Такође, желимо да упозоримо да (не)савлађивање овог додатног градива ни у ком случају не сме утицати на оцену ученика.

У Београду, јула 2018. *Аутори*

# ПРВА ГЛАВА
# КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

## 1.7. СТЕПЕНОВАЊЕ КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕМ

Ако су $y_1$ и $y_2$ произвољни реални бројеви, према правилу множења комплексних бројева записаних у тригонометријском облику, важи

$$(1) \qquad (\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) = \cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2).$$

Тиме се практично множење комплексних бројева модула 1 своди на сабирање њихових аргумената. Ако се сетимо да сличну особину има експоненцијална функција (са реалном независном промењивом), наиме да важи

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2},$$

природно је размислити о могућности да се степеновање позитивног реалног броја чисто имагинарним бројем дефинише као $a^{iy} = \cos y + i\sin y$. Наравно, таква дефинција може да има смисла само за неко фиксирано $a$. Из разлога који ће ученицима моћи да се презентују у четвртом разреду, испоставља се да је за основу $a$ најприродније изабрати број $e = 2{,}71828\ldots$ (који ћемо прецизно дефинисати у четвртој глави уџбеника). Притом, могуће је одмах дефинисати степеновање броја $e$ произвољним комплексним бројем, и то на следећи начин.

**Дефиниција 2.** (Ојлер) За комплексан број $z = x+iy$ дефинише се

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

**Пример 17.** $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$, $e^{1+\frac{3\pi}{4}i} = \dfrac{e}{\sqrt{2}}(-1+i)$. ▲

Напомена. Друга од наведених једнакости, написана у облику

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

представља чувену **Ојлерову формулу**, једну од најважнијих (неки кажу и најлепших) формула у математици. Свакако је интересантно да је њоме повезано пет најважнијих математичких константи – бројеви $0$, $1$, $e$, $i$ и $\pi$.

**Теорема 8.** За све $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbf{Z}$ важи:
$1^\circ$ $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; $2^\circ$ $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$; $3^\circ$ $(e^z)^n = e^{nz}$.

*Доказ.* Доказаћемо само тврђење под $1^\circ$, остала два се доказују слично. Нека је $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Непосредно из особина експоненцијалне функције са реалном независном промењљивом и једнакости (1) следи да је

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Пример 18.** (а) Из једнакости $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ лако се изводи да за све $x \in \mathbf{R}$ важи

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

(б) На основу претходног се лако изводе формуле помоћу којих се (природни) степени синуса и косинуса изражавају преко тригонометријских функција вишеструког аргумента. На пример,

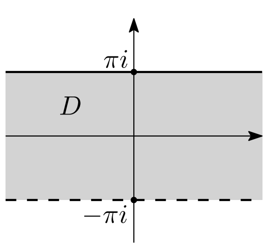
$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \Big(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Big)^3 = -\frac{1}{4}\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{2i} = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x), \\ \cos^4 x &= \Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)^4 = \frac{1}{8}\frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{2} \\ &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 6). \end{aligned}$$

(в) За $z = x + iy$ је $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$. Специјално, $|e^{iy}| = 1$ за $y \in \mathbf{R}$. $\blacktriangle$

Из треће од једнакости примера 17, заједно са својством $1^\circ$ теореме 8, следи други део наредног тврђења.

**Последица 1.** Функција $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}\setminus\{0\}$, $f(z) = e^z$, је *на* и периодична с периодом $2\pi i$.

Као периодична, функција $e^z$ није 1–1, тако да нема инверзну. Међутим, као и код неких реалних функција које смо разматрали (на пример, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sin x$ и сличних), могуће је променом домена функције постићи да она постане бијекција. Довољно је обезбедити да се у домену не налазе две тачке чији се имагинарни делови разликују за $2\pi$. На пример, може се за домен узети следећа „трака“ ширине $2\pi$ (слика 23):



Сл. 23

$$D = \{\, z = x + iy \mid x \in \mathbf{R},\ -\pi < y \leqslant \pi \,\}.$$

**Дефиниција 3.** Инверзну функцију функције $f_1\colon D \to \mathbf{C}\setminus\{0\}$ дате са $f_1(z) = e^z$ називаћемо **логаритмом** и за $w \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ означавати $\ln w = z$ ако и само ако је $w = e^z$, $z \in D$.

**Пример 19.** $\ln(-1) = \ln e^{\pi i} = \pi i$, $\quad \ln i = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2} i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\, i$,
$\ln(1+i) = \ln\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}\right) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{4}\, i$, $\ln(-1-i\sqrt{3}) = \ln\left(2e^{-\frac{2\pi}{3} i}\right) = \ln 2 - \dfrac{2\pi}{3}\, i$. ▲

Нагласимо да су наведени резултати условни и да зависе од начина избора домена $D$, односно кодомена одговарајуће „гране“ логаритма. Поменимо такође да се у теорији комплексних функција посматра и вишезначна „функција“ којом се комплексном броју $w \neq 0$ придружује скуп свих бројева $z \in \mathbf{C}$ за које је $e^z = w$. Ми се тиме овде нећемо бавити.

**Последица 2.** Сваки $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ се може представити у облику $z = e^{\ln|z| + i\varphi}$, $\varphi = \arg z + 2k\pi$.

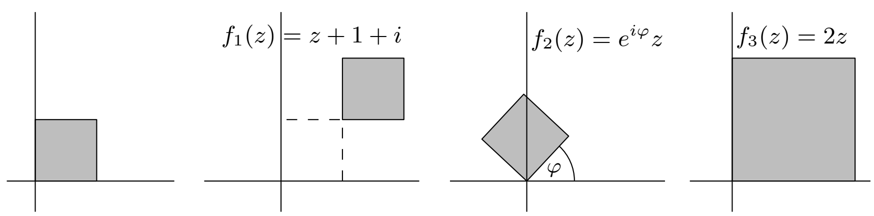
Сада је могуће дефинисати и степен произвољног комплексног броја комплексним бројем.

**Дефиниција 4.** За $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ и $w \in \mathbf{C}$ дефинишемо $z^w = e^{w \ln z}$.

**Пример 20.** $(-1)^i = e^{i \ln(-1)} = e^{i \cdot \pi i} = e^{-\pi}$,
$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \cdot \frac{\pi}{2} i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ (занимљиво је да су последње две вредности реални бројеви!),
$(1+i)^i = e^{i \cdot \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} i\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\ln 2} = e^{-\frac{\pi}{4}} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right)$. ▲

## 1.8. БИЛИНЕАРНА (МЕБИЈУСОВА) ТРАНСФОРМАЦИЈА

Подсетимо се да смо у првој глави уџбеника показали да је свако линеарно пресликавање, $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = az + b$, композиција хомотетије, ротације и транслације. На слици 24 илустровани су примери оваквих пресликавања.




Сл. 24

Природно је запитати се може ли се нешто рећи о пресликавању

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где су } a, b, c, d \in \mathbf{C} \text{ и } ad - bc \neq 0. \tag{2}$$

Тражимо да је $ad - bc \neq 0$, јер у супротном добијамо константно пресликавање које нам није занимљиво.

Уколико је $c = 0$, $f(z)$ је линеарна функција, чија смо својства добро упознали. Најједноставнији случај оваквог пресликавања, а да није линеарно, јесте

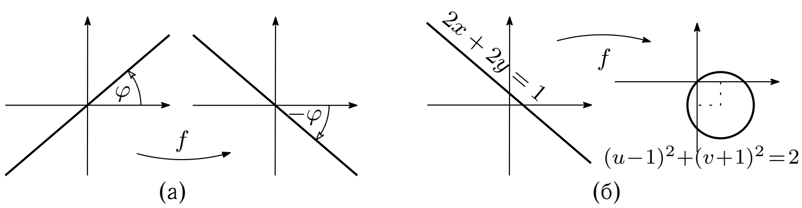
$w = f(z) = 1/z$. Јасно је да је ово бијекција $\mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Нама ће у проучавању пресликавања облика (2) бити корисно да *проширимо* скуп комплексних бројева једном тачком, коју ћемо звати **бесконачно далека тачка**, и означавати са $\infty$, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Геометријски, рећи ћемо да бесконачно далека тачка припада свакој правој у $\overline{\mathbf{C}}$. Овако проширени скуп комплексних бројева се назива и **Риманова сфера**.

Испитајмо сада у шта се пресликавају праве и кружне линије (у даљем ћемо за ове последње користити термин кругови) када се примени бијекција

$$f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}, \qquad f(z) = \begin{cases} 1/z, & z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & z = \infty, \\ \infty, & z = 0. \end{cases}$$

1° Одредити слику праве која садржи координатни почетак.

Права која садржи координатни почетак одређена је једначином $z = \rho e^{i\varphi}$, где је $\rho \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, а $\varphi$ је (фиксирани) угао који права заклапа са реалном осом. Видимо да је $w = 1/z = 1/\rho \cdot e^{-i\varphi}$, за $z \neq 0$. Закључујемо да је слика праве која садржи координатни почетак такође права која садржи координатни почетак, слика 25(а). Специјално, реална и имагинарна оса се пресликавају саме у себе.




Сл. 25

2° Одредити слику праве која не садржи координатни почетак.

Оваква права је задата са $Ax + By + C = 0$, при чему је $A^2 + B^2 \neq 0$, $C \neq 0$ и $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Нека је $w = 1/z = u + iv$, $u, v \in \mathbf{C}$ и

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u+iv} = \frac{u}{u^2+v^2} + i\,\frac{-v}{u^2+v^2}, \quad \text{па следи} \quad x = \frac{u}{u^2+v^2},\ y = \frac{-v}{u^2+v^2}.$$

Када ово уврстимо у једначину праве, добијамо да мора да важи

$$Au - Bv = C(u^2 + v^2),$$

тј. $u^2 + v^2 - \frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v = 0$, односно

$$\Big(u - \frac{A}{2C}\Big)^2 + \Big(v + \frac{B}{2C}\Big)^2 = \frac{A^2 + B^2}{4C^2}.$$

Видимо да смо добили једначину круга са центром у $\left(\frac{A}{2C}, -\frac{B}{2C}\right)$ и полупречником $\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4C^2}}$, који садржи координатни почетак, слика 25(б).

3° Како је $f$ бијекција, следи да се круг који садржи координатни почетак пресликава у праву која га не садржи.

4° Сличном методом као под 2° добија се да се круг који не садржи координатни почетак пресликава у круг који такође не садржи координатни почетак.

Закључујемо да је $f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ бијекција која пресликава праве/кругове у праве/кругове и да је $f = f^{-1}$, тј. $f$ је *инволуција*. Подсетимо се градива геометрије за први разред – инверзија је такође имала оваква својства. Из дефиниције пресликавања $f$ заправо се лако види да је $f$ композиција инверзије у односу на јединични круг $|z| = 1$ и осне симетрије у односу на праву $\operatorname{Im} z = 0$. Специјално, унутрашњост јединичног диска $\{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| \le 1 \,\}$ се пресликава на његову спољашњост и обратно.

**Дефиниција 5.** **Мебијусова**[1] **(билинеарна) трансформација** је рационална функција

$$T : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}, \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

$$T\Big(-\frac{d}{c}\Big) = \infty, \; T(\infty) = \frac{a}{c}.$$

У претходној дефиницији подразумевамо да, уколико је $c = 0$, онда је $-d/c = a/c = \infty$, што се слаже са чињеницом да је у том случају $T(z)$ заправо линеарно пресликавање.

**Нека својства Мебијусових трансформација**

**(а)** Ако је $c \neq 0$, нека је $T_1(z) = z + \dfrac{d}{c}$ (транслација), $T_2(z) = \dfrac{1}{z}$ (композиција инверзије и осне симетрије), $T_3(z) = \dfrac{bc - ad}{c^2} z$ (композиција ротације и хомотетије) и $T_4(z) = z + \dfrac{a}{c}$ (поново транслација). Непосредном провером се добија да је $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, па билинеарна трансформација чува углове и дворазмеру, као композиција пресликавања која имају то својство. Такође, закључујемо да $T(z)$ пресликава праве/кругове у праве/кругове.

**(б)** Композиција две Мебијусове трансформације, као и инверз произвољне Мебијусове трансформације, поново су Мебијусове трансформације, те оне чине групу. Група свих Мебијусових трансформација у односу на композицију функција се назива **Мебијусова група**, и има велики број примена у математици и физици.

**(в)** Билинеарна трансформација $T(z)$ која није идентичко пресликавање може имати највише две фиксне тачке.

Наиме, уколико је $c = 0$, онда је $\infty$ једна фиксна тачка. Једначина $a'z + b' = z$ има више од једног решења ако и само ако је $a' = 1$, $b' = 0$, а у том случају је $T(z)$ идентичко пресликавање.

Уколико је $c \neq 0$, онда $\infty$ није фиксна тачка. Једначина $\frac{az+b}{cz+d} = z$ је квадратна једначина по $z$ и може имати највише два решења, тј. могу постојати највише две различите фиксне тачке пресликавања $T(z)$.

[1] A. F. Möbius (1790–1868), немачки математичар и астроном

**Теорема 9.** Нека су $z_1, z_2, z_3$ три различите тачке у $\overline{\mathbf{C}}$, и нека су $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbf{C}}$ такође међусобно различити. Тада постоји јединствено билинеарно пресликавање $w = T(z)$ тако да је $w_k = T(z_k)$, за $k \in \{1, 2, 3\}$.

*Доказ.* Претпоставимо да ниједна од ових шест тачака није $\infty$, и нека је

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Желимо да изразимо коефицијенте $a, b, c, d$ у зависности од датих шест тачака.

За $k \in \{1, 2, 3\}$ важи

$$w - w_k = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_k+b}{cz_k+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_k)}{(cz+d)(cz_k+d)}.$$

Из ове везе једноставном заменом добијамо да мора да важи

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}, \tag{3}$$

што нам даје тражену трансформацију у зависности од датих тачака.

Случај када је једна од тачака, рецимо $z_3$, једнака $\infty$ разматра се слично, и у том случају добијамо

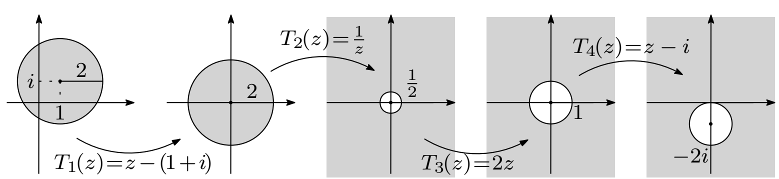
$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Да бисмо доказали јединственост, претпоставимо да важи $T_j(z_k) = w_k$, за $j \in \{1, 2\}$ и $k \in \{1, 2, 3\}$. Тада пресликавање $T_2^{-1} \circ T_1$ има барем три фиксне тачке, $z_1$, $z_2$ и $z_3$, и самим тим, због својства (в), мора бити идентичко пресликавање. ■

**Пример 21.** Наћи билинеарну трансформацију која пресликава тачке $i$, $2$, $-2$ редом у тачке $i$, $1$, $-1$.

*Решење.* Уврстимо дате вредности у формулу (3):
$\dfrac{w-i}{w+1} \cdot \dfrac{1+1}{1-i} = \dfrac{z-i}{z+2} \cdot \dfrac{2+2}{2-i}$. Сређивањем добијамо $T(z) = \dfrac{3z+2i}{iz+6}$. ▲

**Пример 22.** Наћи билинеарно пресликавање које пресликава скуп $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-(1+i)| < 2\}$ у скуп $\{w \in \mathbf{C} \mid |w+i| > 1\}$.




Сл. 26

На слици 26 су означени сви кораци у конструкцији оваквог пресликавања ($T_1$ је транслација, $T_2$ композиција инверзије и осне симетрије, $T_3$ је хомотетија, а $T_4$ поново транслација). Добијамо да је

$$T(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = \frac{-iz+1+i}{z-1-i}.$$

Приметимо да се $1+i$ пресликава у $\infty$ и да се $\infty$ пресликава у $-i$. ▲

**Пример 23.** Наћи билинеарно пресликавање $T(z)$ које пресликава скуп $A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ у скуп $B = \{w \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(w) > 0\}$.

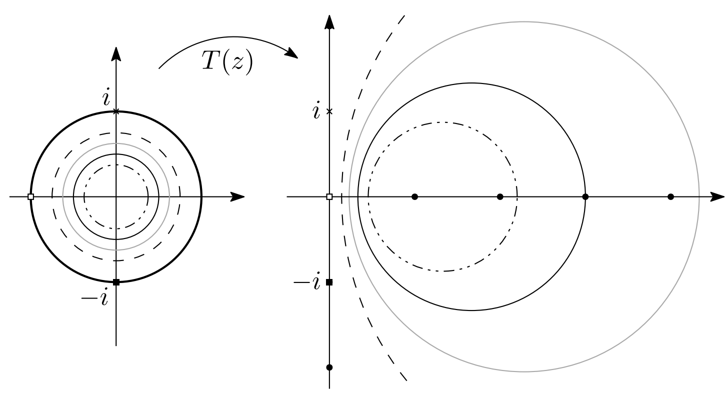
*Решење.* Одредимо најпре пресликавање $S(z)$ које пресликава руб $A' = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ скупа $A$ у руб $B' = \{w \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(w) = 0\}$ скупа $B$. Како се круг пресликава у праву, видимо да круг мора да садржи тачку $-d/c$. Узмимо, на пример, да је $-d/c = 1$ и $d = -1$, $c = 1$. Даље, нека тачка са круга мора да се пресликава у тачку $w = 0$; узмимо, на пример, да је то тачка $z = -1$. Видимо да је једно пресликавање које задовољава ове услове $S(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Провером добијамо да је, за $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$,

$$A' \ni e^{i\varphi} \mapsto S(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{Re}(e^{i\frac{\varphi}{2}})}{2i\,\mathrm{Im}(e^{i\frac{\varphi}{2}})} \in B'.$$

Може се показати (ту ћемо чињеницу овде прихватити без доказа) да, ако се руб неке области $A$ билинеарном функцијом пресликава у неку криву $C$, онда се сама област $A$ пресликава у једну од области коју ограничава крива $C$. У нашем случају, ако бисмо изабрали да буде $T(z) = S(z)$, добили бисмо да је $T(0) = -1$, што би значило да се скуп $A$ пресликава у скуп $\{w \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(w) < 0\}$. Зато још треба применити ротацију за угао $\pi$ око координатног почетка да бисмо добили тражено пресликавање $T(z)$:

$$T(z) = e^{i\pi} \cdot S(z) = -S(z) = \frac{z+1}{1-z}.$$

На слици 27 су приказани неки подскупови скупа $A$, кругови, и њихове слике у скупу $B$, које су такође кругови. ▲




Сл. 27

У овом одељку су наведене основне информације о Мебијусовим трансформацијама. Заинтересовани ученици могу да погледају занимљив и илустративан кратки филм о овим пресликавањима и њиховој вези са стереографском пројекцијом на:

`https://www.youtube.com/watch?v=0z1fIsUNhO4`.

## 1.9. РАЗНИ ЗАДАЦИ

**41.** Са исте стране дужи $PQ$ конструисана су три слична троугла $KPQ$, $QLP$ и $PQM$, таква да је $\measuredangle QPM = \measuredangle PQL = \alpha$, $\measuredangle PQM = \measuredangle KPQ = \beta$ и $\measuredangle PQK = \measuredangle LPQ = \gamma$, при чему је $\alpha < \beta < \gamma$. Доказати да је троугао $KLM$ сличан са прва три.

**42.** Унутар датог квадрата $ABCD$ конструисани су једнакостранични троуглови $ABK$, $BCL$, $CDM$ и $DAN$. Доказати да су средишта дужи $KL$, $LM$, $MN$, $NK$ и средишта дужи $AK$, $BK$, $BL$, $CL$, $CM$, $DM$, $DN$ и $AN$ темена правилног дванаестоугла.

**43.** У равни су дати троугао $A_1A_2A_3$ и тачка $P_0$. Означимо $A_s = A_{s-3}$ за сваки природан број $s \geqslant 4$. Конструишимо низ тачака $P_0$, $P_1$, $P_2$, $\ldots$ тако да се тачка $P_{k+1}$ добија ротацијом тачке $P_k$ за $120^\circ$ у смеру казаљке на сату око тачке $A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Доказати да ако је $P_{1986} = P_0$, тада троугао $A_1A_2A_3$ мора бити једнакостраничан.

**44.** Нека је $\varphi = \arcsin \dfrac{3}{5}$. Доказати да је $\sin 25\varphi$ једнак разломку $\dfrac{p}{5^{25}}$, $p \in \mathbf{Z}$, који се не може скратити.

**45.** Наћи највећу вредност модула комплексног броја $z$ ако је $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 1$.

**46.** Нека су $z_1$, $z_2$ и $z_3$ комплексни бројеви такви да важи $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$ и $z_2 \neq z_3$. Доказати да важи

$$\min_{a \in \mathbf{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{1}{2R} \cdot |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|.$$

**47.** Доказати да за природан број $m$ и произвољан реалан број $x$ важи

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \left( 2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \cos((2m-2k)x) + \binom{2m}{m} \right).$$

**48.** Нека за $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ важи $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = R > 0$ и $z_1 + z_2 + \cdots + z_n \neq 0$. Доказати да тада важи једнакост

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{z_2z_3z_4 \cdots z_n + z_1z_3z_4 \cdots z_n + \cdots + z_1z_2z_3 \cdots z_{n-1}} \right| = R^{2-n}.$$

**49.** Изразити преко тригонометријских функција вишеструког аргумента:
(а) $\cos^5 x$, (б) $\sin^6 x$.

**50.** Израчунати: (а) $\ln(-i)$, $\ln(-1 + i\sqrt{3})$; (б) $(-i)^{1+i}$, $(-1 + i\sqrt{3})^i$.

**51.** Наћи билинеарну трансформацију $T(z)$ која пресликава тачке $0, 1, 6$ редом у тачке $2, 3, 4$.

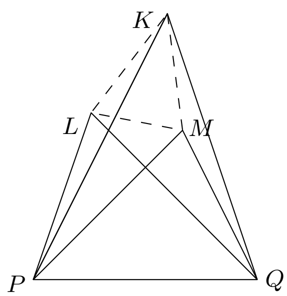
**52.** Наћи билинеарну трансформацију $T(z)$ која пресликава скуп $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ на први квадрант комплексне равни.

## 1.10. РЕШЕЊА

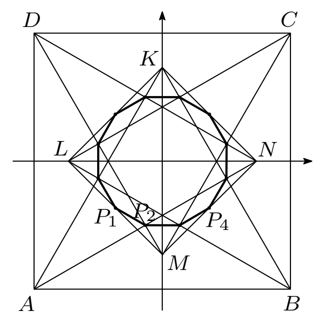
41. Нека су $p$, $q$, $k$, $l$ и $m$ комплексни бројеви који одговарају тачкама $P$, $Q$, $K$, $L$ и $M$, сл. 28. Из сличности троуглова $KPQ$, $QLP$ и $PQM$ следи да је $\dfrac{k-q}{p-q} = \dfrac{q-p}{l-p} = \dfrac{p-m}{q-m}$. Ова три количника су једнака са

$$\frac{(k-q)+(q-p)+(p-m)}{(p-q)+(l-p)+(q-m)} = \frac{k-m}{l-m}.$$

Следи да је $\triangle KLM$ сличан са прва три.




Сл. 28




Сл. 29

42. Поставимо координатни систем тако да је координатни почетак центар датог квадрата, а да тачкама $A$, $B$, $C$, $D$ одговарају, редом, бројеви $-1-i$, $1-i$, $1+i$, $-1+i$, сл. 29. Означимо са $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$, $P_6$, $P_7$, $P_8$, $P_9$, $P_{10}$, $P_{11}$, $P_{12}$ средишта дужи $LM$, $AN$, $BL$, $MN$, $BK$, $CM$, $NK$, $CL$, $DN$, $KL$, $DM$, $AK$ и одговарајућим малим словима комплексне бројеве придружене означеним тачкама. Тада се лако рачуна да је $n = \sqrt{3}-1$, $l = 1-\sqrt{3}$, $m = (1-\sqrt{3})i$, $p_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\,i$, $p_2 = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$, $p_3 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$. Зато је

$$\begin{aligned}(p_3-p_2)(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) &= (2-\sqrt{3})\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\Big)\\ &= \Big(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\Big) + \Big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)i = p_1 - p_2,\end{aligned}$$

што значи да да су странице $P_1P_2$ и $P_2P_3$ једнаке, а $\measuredangle P_1P_2P_3 = 150^\circ$. Слично се може доказати и за остале странице и углове дванаестоугла, па је он правилан.

43. Нека је дата тачка $P_0$ координатни почетак комплексне равни и нека тачкама $A_i$ $(i = 1, 2, \dots)$, односно $P_j$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ одговарају комплексни бројеви $a_i$, односно $p_j$. По условима задатка важи

$$p_{k+1} = a_{k+1} + (p_k - a_{k+1})\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где је $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Примењујући ту релацију више пута и узимајући у обзир да је $p_0 = 0$, добијамо

$$p_{k+1} = (1-\varepsilon)(a_{k+1} + a_k\varepsilon + a_{k-1}\varepsilon^2 + \cdots + a_1\varepsilon^k).$$

По претпоставци је

$$0 = p_0 = p_{1986} = (1-\varepsilon)(a_{1986} + a_{1985}\varepsilon + a_{1984}\varepsilon^2 + \cdots + a_1\varepsilon^{1985}).$$

Узимајући у обзир да је $\varepsilon^3 = 1$ и

$$a_1 = a_4 = a_7 = \cdots, \quad a_2 = a_5 = a_8 = \cdots, \quad a_3 = a_6 = a_9 = \cdots,$$

претходна једнакост даје $a_3 + a_2\varepsilon + a_1\varepsilon^2 = 0$, што се лако трансформише у

$$a_3 - a_1 = (a_2 - a_1)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

То и значи да је троугао $A_1A_2A_3$ једнакостраничан.

44. Биће $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$, па из Муаврове формуле налазимо

$$\begin{aligned}\sin 25\varphi &= \binom{25}{1}\frac{4^{24}\cdot 3}{5^{25}} - \binom{25}{3}\frac{4^{22}\cdot 3^3}{5^{25}} + \binom{25}{5}\frac{4^{20}\cdot 3^5}{5^{25}} - \cdots + \binom{25}{25}\frac{3^{25}}{5^{25}}\\ &= \frac{1}{5^{25}}\left[\binom{25}{1}4^{24}\cdot 3 - \binom{25}{3}4^{22}\cdot 3^3 + \binom{25}{5}4^{20}\cdot 3^5 - \cdots + 3^{25}\right].\end{aligned}$$

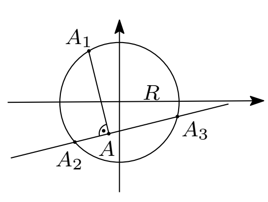
Број у загради није дељив са 5 јер су сви његови сабирци, осим последњег, дељиви са 5.

45. Нека је $\rho = |z| \geq 1$ (зашто ово можемо да претпоставимо?). На основу неједнакости троугла важи

$$|z| = \left|z + \frac{1}{z} + \frac{-1}{z}\right| \leq \left|z + \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{-1}{z}\right|, \text{ одакле следи } \rho - \frac{1}{\rho} \leq 1,$$

па је $\rho \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Да бисмо завршили задатак, приметимо да је за $z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$, $|z| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = |i| = 1$, дакле $|z|_{\max} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

46. Означимо тачке у комплексној равни које одговарају бројевима $z_1$, $z_2$, $z_3$ са $A_1$, $A_2$, $A_3$, редом. Приметимо да је са $z = az_2 + (1-a)z_3$, $a \in \mathbf{R}$, задата једначина праве у комплексној равни, тако да се минимум израза $|az_2 + (1-a)z_3 - z_1|$ достиже када је тачка $A(z)$ заправо подножје висине из $A_1$ на праву $A_2A_3$, сл. 30. Сада имамо да је минимум траженог израза заправо дужина висине из темена $A_1$ на страницу $A_2A_3$ троугла $A_1A_2A_3$, чији је полупречник описаног круга $R$, па важи



Сл. 30

$$\min_{a\in\mathbf{R}}|az_2+(1-a)z_3-z_1| = AA_1 = \frac{A_1A_2\cdot A_1A_3}{2R} = \frac{1}{2R}\cdot|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|.$$

47. Посматрајмо број $z=\cos x+i\sin x$. Тада је $z+1/z=2\cos x$, па степеновањем са $2m$ и коришћењем једнакости $z^k+1/z^k=2\cos(kx)$ добијамо

$$\begin{aligned}\cos^{2m}x &= \frac{1}{2^{2m}}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}\left(\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}z^{2m-2k}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2m}}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}z^{2m-2k}+\sum_{k=m+1}^{2m}\binom{2m}{k}z^{2m-2k}+\binom{2m}{m}z^0\right)\\ &= \frac{1}{2^{2m}}\left(2\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}(z^{2m-2k}+z^{2k-2m})+\binom{2m}{m}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2m}}\left(2\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}\cos((2m-2k)x)+\binom{2m}{m}\right).\end{aligned}$$

48. Нека је $B=z_1z_2z_3\cdots z_n$. Користећи $w\cdot\overline{w}=|w|^2$, имамо

$$\begin{aligned}&\left|\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{z_2z_3z_4\cdots z_n+z_1z_3z_4\cdots z_n+\cdots+z_1z_2z_3\cdots z_{n-1}}\right|\\ &\qquad=\left|\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{\frac{B}{z_1}+\frac{B}{z_2}+\cdots+\frac{B}{z_n}}\right| = \frac{|z_1+z_2+\cdots+z_n|}{|B|\cdot\frac{1}{R^2}\cdot|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}|} = \frac{R^2}{|B|} = R^{2-n}.\end{aligned}$$

49. (а) $\cos^5 x = \dfrac{1}{16}(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x)$;

(б) $\sin^6 x = -\dfrac{1}{32}(\cos 6x-6\cos 4x+15\cos 2x-20)$.

50. (а) $\ln(-i) - \dfrac{\pi}{2}\,i$, $\ln(-1+i\sqrt{3}) = \ln 2+\dfrac{2\pi}{3}\,i$;

(б) $(-i)^{1+i} = -e^{\frac{\pi}{2}}$, $(-1+i\sqrt{3})^i = e^{-\frac{2\pi}{3}}(\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2))$.

51. $T(z) = \dfrac{9z+6}{2z+3}$.

52. Сва таква пресликавања су облика $T(z) = i\alpha\dfrac{z+1}{z-1}$, $\alpha>0$ или облика $T(z) = \alpha\dfrac{z-1}{z+1}$, $\alpha>0$.

## ДРУГА ГЛАВА

# ПОЛИНОМИ

### 2.9. СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Решавајући проблеме, сусретали смо се са полиномима више променљивих облика $x^2+y^2$, $xy+yz+zx$, $xyzt$, итд. Овакве полиноме, код којих се „заменом имена“ променљивих не мења сам полином, зваћемо симетричним полиномима.

**Дефиниција 7.** Полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ је **симетричан** ако за сваку пермутацију $\sigma$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ важи да је

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Симетрични полиноми су веома важни у математици, а посебно се користе у Галоаовој теорији. Ми ћемо се овде бавити само неким једноставним примерима.

Напомена. Сви полиноми који се појављују у Вијетовим формулама су симетрични. Штавише, називају се **основним симетричним полиномима** и означавају са $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где је $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за $1 \le k \le n$, сума свих $\binom{n}{k}$ различитих производа $k$ различитих променљивих. На пример,

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3$$

су основни симетрични полиноми од три променљиве. Следећа теорема је специјалан случај **Њутнове теореме о симетричним полиномима**, која у сличном облику важи за $n$ променљивих, али њена формулација и доказ у општем облику излазе из оквира овог додатка.

**Теорема 16.** Ако је $s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, онда важи

$$s_n = \sigma_1 \cdot s_{n-1} - \sigma_2 \cdot s_{n-2} + \sigma_3 \cdot s_{n-3}. \tag{1}$$

Доказ ове теореме је једноставан и остављамо га ученицима за вежбу.

**Пример 23.** Ако је $a+b+c=0$, доказати да важи

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

*Решење.* Користећи претходну теорему и формулу за квадрат тринома, добијамо

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = -2(ab+bc+ca),\\
a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)(a+b+c)+3abc = 3abc,\\
a^5+b^5+c^5 &= 0\cdot(a^4+b^4+c^4)-(ab+bc+ca)(a^3+b^3+c^3)+abc(a^2+b^2+c^2)\\
&= -3(ab+bc+ca)abc-2(ab+bc+ca)abc = -5abc(ab+bc+ca),
\end{aligned}$$

чиме смо доказали тражени идентитет. ▲

**Пример 24.** У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$xyz=1, \quad x+y+z=xy+yz+zx, \quad x^3+y^3+z^3=\frac{73}{8}.$$

*Решење.* Ово је симетричан систем и користићемо Вијетове формуле и идентитет (1):

$$\sigma_3=1,\ \sigma_1=\sigma_2,\ \sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_2\sigma_1+3\sigma_3=\frac{73}{8}.$$

Одавде добијамо једначину $\sigma_1^3-3\sigma_1^2-\frac{49}{8}=0$, чије је једино реално решење $\sigma_1=\frac{7}{2}$. Следи да су $x$, $y$ и $z$ решења једначине $2t^3-7t^2+7t-2=0$, тј. систем има 6 различитих реалних решења $(x,y,z)$, при чему је $\{x,y,z\}=\{1,\frac{1}{2},2\}$. ▲

**Пример 25.** Нека је $n>3$ природан број и нека за $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{C}$ важи $x_1^j+x_2^j+x_3^j=n$, за $j\in\{1,2,3\}$. Доказати да је тада испуњено

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x-\binom{n}{3}.$$

*Решење.* Користећи Вијетове формуле, видимо да је потребно и довољно да докажемо да је $\sigma_k=\binom{n}{k}$. По условима задатка је $\sigma_1=n$, тј. $\sigma_1=\binom{n}{1}$. Даље, $\sigma_1^2-2\sigma_2=n$, и одатле $\sigma_2=\binom{n}{2}$.

На крају, користећи (1), имамо да је $n=\sigma_1\cdot n-\sigma_2\cdot n+3\sigma_3$, па је $\sigma_3=\binom{n}{3}$. ▲

Напомена. Овај пример може да се уопшти на врло природан начин, али би се за доказ онда користила Њутнова теорема о симетричним полиномима у општем облику и математичка индукција.

## 2.10. ЛАГРАНЖОВА ИНТЕРПОЛАЦИОНА ФОРМУЛА

Као што је добро познато, ако су у равни дате две тачке, $(x_0,y_0)$ и $(x_1,y_1)$, уз $x_0\neq x_1$, онда постоји (тачно једна) линеарна функција $P(x)=ax+b$ чији график садржи те две тачке и њен експлицитан облик је лако одредити. Он се може записати у облику

$$P(x)=y_0\,\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\,\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

Претпоставимо сада да је дата $(n+1)$-на тачка у равни, $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, ..., $(x_n, y_n)$, са различитим апсцисама. Природно је запитати се постоји ли полином $P(x)$ степена мањег или једнаког од $n$, такав да је $P(x_i) = y_i$ за $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ако постоји, можемо ли га конструисати?

Одговор на оба питања је потврдан. Метод за налажење полинома који ћемо овде описати, и који носи име по Лагранжу[1] који га је објавио 1795. године, први је открио Воринг[2] 1779. године.

**Теорема 17.** Ако је дата $(n+1)$-на тачка у равни, $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, ..., $(x_n, y_n)$, при чему је $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$, тада постоји *јединствен* полином $P(x)$ степена највише $n$, такав да је $P(x_i) = y_i$ за $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и тај полином се може записати као

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[ y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]. \tag{2}$$

*Доказ.* Лако се види да је $P(x_i) = y_i$, за свако $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

За доказ јединствености, претпоставимо да полином $Q(x)$ степена највише $n$ задовољава да $Q(x_i) = y_i$ за свако $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Тада полином $P(x) - Q(x)$, који је такође степена највише $n$, има $(n+1)$-ну различиту нулу, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, одакле следи $P(x) - Q(x) \equiv 0$. ■

**Пример 26.** Одредити квадратни трином $P(x)$ такав да је $P(1) = -1$, $P(2) = 5$ и $P(4) = 0$.

*Решење.* Применом форуле (2) добијамо

$$\begin{aligned} P(x) &= (-1)\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 0 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} \\ &= -\frac{17}{6}x^2 + \frac{29}{2}x - \frac{38}{3}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Пример 27.** Дат је природан број $n \geq 2$. Нека је $P(x)$ полином с реалним коефицијентима степена $n$ такав да важи $P(x) = \frac{x}{x+1}$, за $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Наћи $P(n+1)$.

*Прво решење.* Уврстимо дате вредности и $x = n+1$ у формулу (2). Добијамо

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_{i=0}^{n} \left[ \frac{i}{i+1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{n+1-j}{i-j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n-1)!}{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot (n-1)!} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(n+1)n \cdot (n-2)!}{(-1)^{n-2} \cdot 2! \cdot (n-2)!} \\ &\quad + \frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)n(n-1) \cdot (n-3)!}{(-1)^{n-3} \cdot 3! \cdot (n-3)!} + \cdots + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(-1)^0 \cdot n!} \end{aligned}$$

---

[1] J. L. Lagrange (1736–1813), француски математичар

[2] E. Waring (1736–1798), енглески математичар

$$= (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\binom{n+1}{1} - \frac{2}{3}\binom{n+1}{2} + \frac{3}{4}\binom{n+1}{3} - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\binom{n+1}{n}\right) = (-1)^{n-1}S_n.$$

Добили смо прилично компликовану суму $S_n$ за чије израчунавање треба да приметимо да је $\frac{1}{k+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+2}\binom{n+2}{k+1}$, као и да представимо $\frac{k}{k+1}\binom{n+1}{k}$ као $\binom{n+1}{k} - \frac{1}{k+1}\binom{n+1}{k}$. Видимо да нам примена теореме свакако даје полином који тражимо, али понекад постоје и једноставнији методи да се реше овакви проблеми, као што ћемо представити у другом решењу.

*Друго решење.* Посматрајмо полином $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Ово је полином степена $n+1$ који, због услова задатка, има за нуле све елементе скупа $\{0,1,2,\ldots,n\}$, њих $n+1$. Следи да је $Q(x) = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$, за неко $c \in \mathbf{R}$. Из овога и из дефиниције полинома $Q(x)$ следи да је $Q(-1) = 1 = c(-1)^{n+1}(n+1)!$, па је $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Сада добијамо

$$Q(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)n(n-1)\cdots 1 = (-1)^{n+1},$$

па је $P(n+1) = \dfrac{Q(n+1)+n+1}{n+2} = \begin{cases} 1, & n \text{ непаран}, \\ \frac{n}{n+2}, & n \text{ паран}. \end{cases}$ Овако смо доказали и да је

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{k}{k+1}\binom{n+1}{k} = \begin{cases} 1, & n \text{ непаран}, \\ -\frac{n}{n+2}, & n \text{ паран}. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

## 2.11. РАЗНИ ЗАДАЦИ

**70.** Ако је $a+b+c=0$, доказати да важи:

(а) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7} = \dfrac{a^5+b^5+c^5}{5} \cdot \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$;

(б) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7} \cdot \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} = \left(\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2$.

**71.** У скупу $\mathbf{R}$ решити систем једначина

$$x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2 = x^3+y^3+z^3,\ (x+y)(x+z)(y+z) = -2.$$

**72.** Одредити полином $P(x)$ трећег степена који задовољава једнакости $P(-2) = 5$, $P(0)=1$, $P(4)=-3$ и $P(5)=1$.

**73.** Нека је $P$ полином с целобројним коефицијентима, различит од константе. Обележимо са $n(P)$ број свих различитих целих бројева $k$ за које је $[P(k)]^2 = 1$. Доказати да је $n(P) - \mathrm{st}(P) \leqslant 2$.

**74.** Нека је $P_1(x) = x^2 - 2$ и $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ за $k = 2, 3, \ldots$ . Доказати да су за свако $n \in \mathbf{N}$ сва решења једначине $P_n(x) = x$ реална и међусобно различита.

**75.** Ако је $n \geqslant 2$ природан број и $x_1, \dots, x_n$ су решења једначине $x^n + x + 1 = 0$ у скупу $\mathbf{C}$, израчунати производ $(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n)$.

**76.** Ако полином $P(x) = x^{20} - 20x^{19} + a_{18}x^{18} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$ има све реалне и позитивне корене, наћи све коефицијенте полинома $P(x)$.

**77.** Наћи све полиноме облика $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \cdots \pm x \pm 1$, $n \in \mathbf{N}$ чије су све нуле реалне.

**78.** Дати су полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ десетог степена, са реалним коефицијентима, чији су најстарији коефицијенти једнаки један. Ако једначина $P(x) = Q(x)$ нема реалних решења, доказати да полином $P(x + 1) - Q(x - 1)$ има бар један реалан корен.

**79.** Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, такав да за три цела броја $a, b, c$ важи $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$. Доказати да је $a = b = c$.

**80.** Нека је $p(x)$ полином са целобројним коефицијентима такав да бројеви $p(1)$, $p(2)$ и $p(3)$ нису дељиви са 3. Доказати да $p(x)$ нема целобројних нула.

**81.** Нека је $r(x)$ полином са реалним коефицијентима, $r(x) = 6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Ако за $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ важи $r(k) = 13k$, наћи $d$.

## 2.12. РЕШЕЊА

71. $(-1, -1, 2)$, $(-1, 2, -1)$ и $(2, -1, -1)$.

72. $P(x) = \frac{5}{42}x^3 - \frac{1}{14}x^2 - \frac{55}{21}x + 1$.

73. Нека су $a_1$, $a_2$, $\dots$, $a_k$ цели бројеви за које је $P(a_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, и $b_1$, $b_2$, $\dots$, $b_l$ цели бројеви за које је $P(b_j) = -1$, $j = 1, 2, \dots, l$. Тада су $a_i$ корени полинома $P(x) - 1$, па важи

$$P(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k)Q(x), \tag{3}$$

где је $Q(x)$ полином са целобројним коефицијентима.

Ако је $l \leqslant 2$, тада важи $k + l \leqslant k + 2 \leqslant \mathrm{st}(P) + 2$. Ако је $l > 2$, стављајући у (3) $x = b_j$ $(j = 1, 2, \dots, l)$ добијамо

$$-2 = P(b_j) - 1 = (b_j - a_1)(b_j - a_2) \cdots (b_j - a_k)Q(b_j),$$

одакле закључујемо да је сваки од бројева $b_j - a_i$ $(i = 1, 2, \dots, k;\ j = 1, 2, \dots, l)$ делитељ броја 2. Ако би било $k > 2$ и, на пример, $a_1 < a_2 < a_3$, $b_1 < b_2 < b_3$ и $a_1 < b_1$, добили бисмо $b_3 - a_1 \geqslant 3$, што је немогуће. Зато је $k \leqslant 2$, па је $k + l \leqslant 2 + l \leqslant \mathrm{st}(P) + 2$.

74. Полином $P_k$ има степен два пута већи од степена полинома $P_{k-1}$ (то следи из рекурентне формуле), а $P_1$ има степен 2, дакле степен полинома $P_k$ је $2^k$. Ако је $x = 2\cos\alpha$, биће $P_1(x) = 4\cos^2\alpha - 2 = 2\cos 2\alpha$. Математичком индукцијом лако доказујемо да је $P_n(x) = 2\cos 2^n\alpha$. Зато је још довољно доказати да једначина $\cos 2^n\alpha = \cos\alpha$ има $2^n$ различитих решења у интервалу $[0, \pi)$ (двоструки косинуси тих решења биће онда $2^n$ различитих реалних решења једначине $P_n(x) = x$).

75. Бројеви $x_i+1$ су нуле полинома $(x-1)^n+(x-1)+1$, чији је слободни члан $(-1)^n$, па је тражени производ, по Вијетовим формулама, једнак $1$.

76. По Вијетовим формулама, $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=20$, $x_1x_2\ldots x_{20}=1$. Међутим, према АГ-неједнакости је $1=\sqrt[20]{x_1x_2\ldots x_{20}}\leqslant\frac{1}{20}\left(x_1+x_2+\cdots+x_{20}\right)=1$, при чему једнакост важи ако и само ако је $x_1=x_2=\cdots=x_{20}=1$, тј. $P(x)=(x-1)^{20}$.

77. За $n=1$ или $n=2$ лако се провери да су то полиноми $x-1$, $x+1$, $x^2-x-1$, $x^2+x-1$. Претпоставимо сада да је $n\geqslant 3$. Тада је $x_1x_2\cdots x_n=\pm 1$. Да бисмо применили неку неједнакост између средина, природно је да посматрамо квадрате решења:

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=(x_1+\cdots+x_n)^2-2(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)=1\pm 2=3,$$

јер збир квадрата реалних бројева мора бити ненегативан, и мора бити $x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n=-1$, тј. коефицијент уз $x^{n-2}$ мора бити $-1$. Следи $\frac{3}{n}=\frac{1}{n}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)\geqslant\sqrt[n]{x_1^2\cdots x_n^2}=1$, па мора бити $n\leqslant 3$. Провером се добије да полиноми $x^3-x^2-x+1$ и $x^3+x^2-x-1$ имају три реалне нуле.

78. Нека је $P(x)=x^{10}+p_9x^9+\cdots+p_1x+p_0$ и $Q(x)=x^{10}+q_9x^9+\cdots+q_1x+q_0$. Из услова задатка знамо да полином $(p_9-q_9)x^9+\cdots+(p_1-q_1)x+(p_0-q_0)$ нема реалних корена, па не може бити непарног степена, тј. мора бити $p_9=q_9$. Сада имамо да важи $P(x+1)-Q(x-1)=x^{10}+(p_9+10)x^9+\cdots-(x^{10}+(q_9-10)x^9+\ldots)=20x^9+\cdots$, а како полином деветог степена са реалним коефицијентима има бар један реалан корен, доказали смо тврђење задатка.

79. Не умањујући општост, нека је $a=\max\{a,b,c\}$. Из задатка 63(а) знамо да мора да важи $k(a-b)=P(a)-P(b)=b-c$, за неко $k\in\mathbf{Z}$. Слично, $l(b-c)=c-a$ и $m(c-a)=a-b$, за $l,m\in\mathbf{Z}$. Приметимо да уколико су нека два од бројева $a,b,c$ једнака, онда сва три морају бити међусобно једнака.

    Претпоставимо сада $a\neq b\neq c\neq a$. Из $a-b=m(c-a)=ml(b-c)=mlk(a-b)$ добијамо $mlk=1$. Ово је могуће само ако је бар један од бројева $m$, $l$, $k$ једнак $1$, што је, када уврстимо у одговарајућу једнакост, у контрадикцији са условом да су бројеви $a$, $b$, $c$ међусобно различити. Следи да мора бити $a=b=c$.

80. Претпоставимо супротно, да постоји цео број $k$ такав да је $p(k)=0$. Користећи задатак 63(а), закључујемо да мора да важи $k-1\mid p(k)-p(1)=-p(1)$, $k-2\mid -p(2)$, $k-3\mid -p(3)$. Међутим, један од бројева $k-1$, $k-2$, $k-3$ мора бити дељив са 3, што је контрадикција.

81. Полином петог степена $q(x)=r(x)-13x$ има корене $1,2,3,4,5$, па важи $q(x)=c(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, за неко $c\in\mathbf{R}$. Како је коефицијент уз $x^5$ у полиному $r(x)$, па самим тим и у $q(x)$, једнак $6$, следи да је $c=6$. Дакле $d=6\cdot 5!\cdot(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+13=1657$.

# ТРЕЋА ГЛАВА
# РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

## 3.5. КАНТОРОВ СКУП

Када смо увели појмове пребројивости и непребројивости скупова, срели смо се са неким тврђењима која се нису слагала са нашом интуицијом; такво је, на пример, тврђење да су скупови $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{N}$ еквивалентни („имају исти број елемената“). Конструкција низа позитивних рационалних бројева описана у одговарајућем доказу (теорема 12 у уџбенику) није била таква да се може лако одредити $n$-ти члан тог низа. Поменимо овде да следећа рекурентна веза може да послужи у ту сврху. Наиме, условима

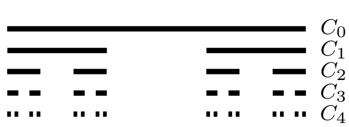
$$q_0 = 1, \quad q_{i+1} = \frac{1}{[q_i] + 1 - \{q_i\}} \quad \text{за} \quad i \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

где је $[x]$ цео део броја $x$, а $\{x\} = x - [x]$ његов разломљени део, одређен је Калкин-Вилфов (Calkin-Wilf) низ у којем се сваки позитиван рационалан број појављује тачно једном:

$$\frac{1}{1} \longmapsto \frac{1}{2} \longmapsto \frac{2}{1} \longmapsto \frac{1}{3} \longmapsto \frac{3}{2} \longmapsto \frac{2}{3} \longmapsto \frac{3}{1} \longmapsto \frac{1}{4} \longmapsto \frac{4}{3} \longmapsto \frac{3}{5} \longmapsto \frac{5}{2} \longmapsto \cdots$$

У овом одељку бавићемо се још једном занимљивом и крајње неинтуитивном конструкцијом, чије је проучавање помогло у постављању основа класичне топологије.

**Дефиниција 10.** **Канторов скуп** $C$ се дефинише на следећи начин:




Сл. 9

$$\begin{aligned}
&C_0 = [0,1],\\
&C_1 = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right],\\
&C_2 = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right],\\
&\ \ \vdots\\
&C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.
\end{aligned}$$

Скуп $C_{n+1}$ се добија из скупа $C_n$ избацивањем „средње трећине“ сваког од $2^n$ затворених интервала чија је унија $C_n$. Такође, важи $x \in C$ ако и само $x \in C_n$ за свако $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Приметимо прво да, уколико је $y$ крајња тачка неког од одсечака чија је унија скуп $C_n$, тада је $y$ такође крајња тачка неког од одсечака чија је унија $C_{n+1}$. Следи да скуп $C$ садржи све бројеве облика $\dfrac{m}{3^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $0 \le m \le 3^n$, па је он најмање пребројив.

Шта још можемо да кажемо о скупу $C$? Да ли је он заиста пребројив? Садржи ли неки отворени интервал? Садржи ли ирационалне бројеве? Сада ћемо дати одговоре на ова питања.

**(1)** Канторов скуп $C$ не садржи ниједан интервал $(a,b)$, $a<b$.

Нека је $(a,b) \subset [0,1]$. Како је $0 < b-a < 1$, следи $-\log_3(b-a) > 0$. По Архимедовом својству (теорема 4'), постоји природан број $m$ такав да је $m \cdot 1 > -\log_3(b-a)$, одакле добијамо да је $3^{-m} < b-a$. Како је $C_m$ унија затворених интервала дужине $3^{-m}$, добијамо да $(a,b) \not\subset C_m$, па самим тим $(a,b) \not\subset C$.

**(2)** Канторов скуп се добија избацивањем „средњих трећина“ затворених интервала, па је природно рећи да је његова „дужина“ (прецизан термин је „мера“) једнака дужини сегмента $[0,1]$ умањеној за збир дужина избачених интервала:

$$1 - \Big(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots\Big)$$
$$= 1 - \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{2}{3} + \Big(\frac{2}{3}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{2}{3}\Big)^n + \cdots\Big) = 0,$$

као што ћемо видети у глави 4. Дакле „дужина“ Канторовог скупа је једнака нули.

**(3)** Канторов скуп је непребројив.

Постоји леп доказ ове чињенице који користи бројевни систем са основом 3. Ми ћемо, међутим, овде представити доказ који се базира на оригиналном Канторовом доказу за непребројивост интервала $(0,1)$.

Претпоставимо да је скуп $C$ пребројив, тј. $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$. Конструисаћемо тачку из $C$ која је различита од свих $u_i$. Наиме, како је $u_1 \in C \subset [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, а ова два одсечка су међусобно дисјунктна, можемо изабрати онај од њих који не садржи $u_1$ и означити га са $I_1$. Сада изаберимо један од два одсечка дужине $1/9$ из скупа $C_2 \cap I_1$ који не садржи $u_2$ и означимо га са $I_2$. Настављајући на исти начин, добијамо низ уметнутих одсечака $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, који по Канторовом својству (теорема 7) и задатку 31, има тачно један елемент у пресеку, означимо га са $u$. Сада имамо $u \in C$, $u \neq u_k$ за свако $k \in \mathbf{N}$, па смо добили контрадикцију, тј. Канторов скуп је непребројив.

**(4)** Сада је лако видети да Канторов скуп мора садржати ирационалне бројеве, јер је непребројив.

Канторов скуп поседује још нека занимљива својства о којима овде не можемо говорити, јер би то захтевало даље увођење нових појмова.

## 3.6. КАРДИНАЛНИ БРОЈЕВИ

У овом одељку проширићемо наша знања о упоређивању бесконачних скупова и, између осталог, одговорити на питања постављена на крају одељка 3.4 у уџбенику. Најпре уведимо једну уобичајену ознаку.

**Дефиниција 11.** Ако су скупови $A$ и $B$ еквивалентни (у смислу дефиниције 8), казаћемо да они имају исти **кардинални број** и писаћемо

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B.$$

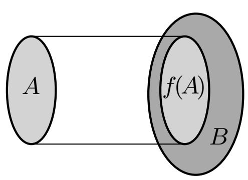
Посебно, кардинални број пребројивих скупова означаваћемо са $\aleph_0$ [1], а кардинални број скупова еквивалентних скупу реалних бројева означаваћемо са $\mathfrak{c}$ (за такве скупове још ћемо рећи да имају **моћ континуума**).

Дакле, према дефиницији 11 и оном што смо показали у одељку 3.4, важи

$$\operatorname{card} \mathbf{N} = \operatorname{card} \mathbf{Z} = \operatorname{card} \mathbf{Q} = \aleph_0, \quad \operatorname{card} \mathbf{R} = \mathfrak{c}.$$

Како је $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$, природно би било рећи и да је „$\aleph_0 < \mathfrak{c}$“. Наравно, требало би најпре дефинисати релацију поретка у скупу кардиналних бројева. То чинимо наредном дефиницијом.

**Дефиниција 12.** За скуп $A$ кажемо да је моћи **не веће** од скупа $B$ и пишемо $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ ако је скуп $A$ еквивалентан неком подскупу скупа $B$. Ако је још и $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$, онда кажемо да $A$ има **мању моћ** од $B$ и пишемо $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$.



Сл. 10

Јасно је да је услов $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ еквивалентан сваком од следећих:

- постоји 1–1 функција $f\colon A \to B$ (сл. 10);
- постоји функција $g\colon B \to A$ која је *на*.

Специјално, како је $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ и знамо да је $\operatorname{card} \mathbf{N} \neq \operatorname{card} \mathbf{R}$, можемо заиста писати $\operatorname{card} \mathbf{N} < \operatorname{card} \mathbf{R}$, тј. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Ознака $\leqslant$ уведена претходном дефиницијом сугерише да је реч о релацији поретка. То је заиста тачно, али доказ те чињенице (прецизније, докази њене антисиметричности, као и линеарности тог поретка) далеко су од једноставних. Зато без доказа наводимо следећу теорему.

**Теорема 17.** Релација $\leqslant$ између кардиналних бројева је релација линеарног поретка.

Видели смо (теорема 15 и задаци 17 и 39) да је унија највише пребројиво много пребројивих скупова пребројив скуп. Слични, помало „необични“ закључци важе и за скупове кардиналности $\mathfrak{c}$. На пример, у задатку 44 овог додатка се

[1] Чита се „алеф-нула“ (алеф – прво слово хебрејског алфабета)

доказује да су скупови тачака интервала $[a,b]$ и $(a,b)$ (па свакако и $[a,b)$, као и цео скуп $\mathbf{R}$) међусобно еквивалентни. На други начин записано,

$$\operatorname{card}(a,b) = \operatorname{card}[a,b) = \operatorname{card}[a,b] = \mathfrak{c}.$$

За следећу особину је сам Кантор, „отац“ теорије кардиналних бројева, писао: „видим, али не верујем“.

**Теорема 18.** Скупови $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}$ су еквивалентни.

Дакле, $\operatorname{card}\mathbf{R}^2 = \mathfrak{c}$, одакле се лако индукцијом добија да је $\operatorname{card}\mathbf{R}^n = \mathfrak{c}$ за све $n \in \mathbf{N}$. Како је очигледно $\mathbf{C} \sim \mathbf{R}^2$, то је и $\operatorname{card}\mathbf{C} = \mathfrak{c}$.

*Доказ.* На основу задатка 44 знамо да је $\mathbf{R} \sim [0,1)$, па је довољно доказати да је полузатворени квадрат $B = [0,1)^2$ еквивалентан интервалу $A = [0,1)$. Очигледно је $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$. С друге стране, свакој тачки $(x,y) \in B$, где су $x = 0{,}x_1x_2\ldots$ и $y = 0{,}y_1y_2\ldots$ децимални записи бројева $x$ и $y$, придружимо реални број $z = 0{,}x_1y_1x_2y_2\cdots \in A$. Лако се види да је ово пресликавање 1-1, што значи да је $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} A$. На основу теореме 17 следи да је $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$. ■

Лако се показује (задаци 42 и 43 у уџбенику) да сваки бесконачан скуп садржи пребројив подскуп, као и да је сваки подскуп пребројивог скупа коначан или пребројив. У складу са уведеном дефиницјом, то значи да је $\aleph_0$ најмањи бесконачан кардинални број. А да ли постоје кардинални бројеви већи од $\mathfrak{c}$? Одговор даје следећа

**Теорема 19.** (Кантор) За произвољан скуп $A$ важи

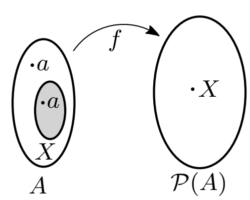
$$\operatorname{card} A < \operatorname{card}\mathcal{P}(A),$$

где је $\mathcal{P}(A)$ партитивни скуп (тј. скуп свих подскупова) скупа $A$.

*Доказ.* Тврђење $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card}\mathcal{P}(A)$ је тривијално, те је само потребно да докажемо да не може бити $\operatorname{card} A = \operatorname{card}\mathcal{P}(A)$. Претпоставимо супротно – да постоји бијекција $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$. Означимо са $X$ следећи скуп (сл. 11):

$$X = \{\, x \in A \mid x \notin f(x) \,\}.$$

Како је $X \subset A$, то је $X \in \mathcal{P}(A)$, па, како је функција $f$ *на*, постоји $a \in A$, такав да је $f(a) = X$. Да ли елемент $a$ припада скупу $X$ или не? Ако би било $a \in X = f(a)$, на основу дефиниције скупа $X$ следило би да елемент $a$ не задовољава дефинициони услов $x \notin f(x)$, тј. да $a \notin X$. У другом могућем случају, ако би било $a \notin X = f(a)$, следило би, по дефиницији скупа $X$, да $a \in X$. Дакле, у оба случаја добијамо контрадикцију, па закључујемо да функција $f$ не може бити *на*. ■



Сл. 11

Претпостављамо да су неки ученици приметили да је идеја наведеног доказа Канторове теореме блиско повезана са познатим „парадоксом берберина“, чија једна формулација гласи:

> У неком селу постоји само један берберин који брије све становнике тог села изузев оних који се сами брију. Ко брије тог берберина?

Модификација овог класичног парадокса, исказана на језику скупова, представља познати *Раселов*[2] *парадокс*, који је почетком XX века изазвао кризу у заснивању теорије скупова (па тиме и читаве математике). Ова криза је мотивисала прецизније, аксиоматско увођење основних појмова везаних за скупове.

Као што знамо, ако неки коначан скуп има $n$ елемената, тада његов партитивни скуп има $2^n$ елемената. По аналогији се зато означава $\operatorname{card}\mathcal{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A}$. Према доказној теореми 19, важи

$$\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} < 2^{2^{\mathfrak{c}}} < \cdots ,$$

тј. *постоји бесконачно много различитих бесконачних кардиналних бројева.*

Намеће се и питање односа између бројева $2^{\aleph_0}$ и $\mathfrak{c}$. Одговор даје још једна теорема коју наводимо без доказа.

**Теорема 20.** Важи $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$, тј. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Може се још поставити питање да ли постоји неки кардинални број који се налази строго између $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$. Претпоставка да је одговор на ово питање одречан названо је *континуум-хипотезом.* Шездесетих година XX века доказано је (П. Коен[3]) да та хипотеза не може бити ни доказана ни оповргнута у оквиру познатих аксиоматских система теорије скупова. Другим речима, њен логички статус је сличан статусу аксиоме паралелности у односу на остале аксиоме еуклидске геометрије.

## 3.7. РАЗНИ ЗАДАЦИ

**44.** Доказати да је $[0,1] \sim (0,1)$.

**45.** Ако је $A$ пребројив скуп, такав је и $A^n$, $n \in \mathbf{N}$. Доказати.

**46.** (а) Доказати да је скуп свих полинома са целобројним коефицијентима пребројив.

(б) Доказати да је скуп свих алгебарских бројева пребројив, а скуп свих трансцендентних реалних бројева непребројив (видети дефиницију 5 у другој глави).

**47.** Доказати: $1^\circ$ унија бесконачног скупа $A$ и највише пребројивог скупа $B$ је скуп чија је моћ иста као и скупа $A$; $2^\circ$ кардинални број непребројивог бесконачног скупа $A$ се не мења ако му одузмемо највише пребројив скуп $B$.

**48.** Доказати да је свака фамилија дисјунктних интервала из $\mathbf{R}$ највише пребројива.

---

[2] B. Russell (1872–1970), енглески филозоф

[3] P. Cohen (1934–2007), амерички математичар

**49.** Унија највише пребројиво много скупова кардиналног броја $\mathfrak{c}$ има кардинални број $\mathfrak{c}$. Доказати.

**50.** Скуп свих функција $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ има моћ која је строго већа од моћи континуума. Доказати.

## 3.8. РЕШЕЊА

44. Посматрајмо произвољан низ различитих тачака сегмента $[0,1]$ чија прва два члана су крајеви тог сегмента: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3, \ldots, x_n, \ldots$ . Тада бројеви $x_3$, $x_4, \ldots$ леже унутар интервала $(0,1)$, а исто важи и за остале тачке сегмента $[0,1]$ које нису чланови уоченог низа. Бијекција $f$ између тачака сегмента и интервала може се успоставити, на пример, на следећи начин:

$$f(x_1) = x_3,\ f(x_2) = x_4,\ \ldots,\ f(x_n) = x_{n+2}, \ldots,\ f(y) = y \text{ за } y \neq x_i,\ i \in \mathbf{N}.$$

45. Користити метод математичке индукције и задатак 17.

46. (a) Користећи претходни задатак најпре доказати да је скуп полинома са целобројним коефицијентима фиксираног степена $n$ пребројив. Затим искористити задатак 39.

    *Напомена.* Из резултата овог задатка на други начин (без коришћења Лиувилове теореме 2.11) следи да постоје трансцендентни бројеви (али се не добија ниједан конкретан пример таквог броја).

47. $1^\circ$ Постоји пребројив скуп $C \subset A$ (задатак 43). Ако означимо $D = A \setminus C$, тврђење следи из $A = D \cup C$ и $A \cup B = D \cup (C \cup B)$, јер је $C \sim C \cup B$.
    $2^\circ$ Скуп $C = A \setminus B$ је бесконачан, па је на основу $1^\circ$, $C \cup B \sim C$.

48. У сваком од интервала те фамилије изаберимо рационалан број; због дисјунктности поменутих интервала, ти бројеви су међусобно различити. Тиме је дефинисана једна 1–1 функција из скупа интервала у пребројив скуп $\mathbf{Q}$, па је и сама та фамилија највише пребројива.

49. Није ограничење општости ако претпоставимо да су скупови $A_k$ дисјунктни. Важи $A_k \sim [k, k+1)$, па је унија скупова $A_k$ еквивалентна највише пребројивој унији интервала $[k, k+1)$, дакле неком (коначно или бесконачном) интервалу реалне праве, а сваки од таквих интервала има кардинални број $\mathfrak{c}$.

50. Има бар онолико функција датог облика колико има функција $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$, а ових последњих има $2^{\mathfrak{c}}$, дакле строго више од $\mathfrak{c}$.

## ЧЕТВРТА ГЛАВА

# НИЗОВИ

### 4.6. ПОДНИЗОВИ. ТАЧКЕ НАГОМИЛАВАЊА. ГОРЊИ И ДОЊИ ЛИМЕС

У највећем делу основног текста овог уџбеника бавили смо се углавном низовима који имају (јединствено одређену) граничну вредност (коначну или бесконачну). Помињали смо, међутим, и примере низова који немају лимес; подсетимо се неких од њих,

**Пример 47.** 1° Низ $a_n = (-1)^n$ нема граничну вредност. Наиме, за $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, је $a_{2k} = 1$, а за $n = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}$, је $a_{2k-1} = -1$, па не може постојати број $b$ коме су сви чланови низа почев од неког „произвољно близу“. Овај низ је ипак ограничен, очигледно је $|a_n| \leqslant 1$ за све $n \in \mathbf{N}$.

2° Низ $a_n = n^{(-1)^n}$ је неограничен, али не тежи (ниједној) бесконачности. Наиме, за парно $n$ је $a_{2k} = 2k$ и те вредности теже $+\infty$ кад $k \to \infty$, а за непарно $n$ је $a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \to 0$ кад $k \to \infty$. ▲

Наведени примери сугеришу увођење следећих појмова.

**Дефиниција 12.** Ако је $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ низ реалних бројева и $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ је строго растући низ природних бројева, онда за низ $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ кажемо да је **подниз** низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ако неки од поднизова низа $(a_n)$ има (коначну или бесконачну) граничну вредност $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, онда кажемо да је $a$ **тачка нагомилавања** низа $(a_n)$.

Низови из примера 47 имали су по две тачке нагомилавања, док сви низови који имају лимес (и само они) очигледно имају тачно једну тачку нагомилавања. Специјално, та тачка нагомилавања код конвергентног низа је коначна. Јасно је да постоје низови са три, четири, ... тачака нагомилавања. Али да ли постоји низ са бесконачно много тачака нагомилавања? И да ли постоји низ који нема ниједну тачку нагомилавања? Потврдан одговор на прво питање даје следећи пример.

**Пример 48.** Нека је $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ било који пребројив скуп реалних бројева. Посматрајмо следећу (бесконачно пута бесконачно) таблицу:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & \dots \\ a_2 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & \dots \\ a_3 & a_3 & a_3 & \dots & a_3 & \dots \\ \vdots & & & & & \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n & \dots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Према задатку 39 главе 3, у овој таблици има пребројиво много чланова (пребројива унија пребројивих скупова је пребројива), па се ти чланови могу поређати у низ (на пример, дијагоналним поступком). Добијени низ има очигледно, између осталих, подnизове облика $(a_n, a_n, \dots, a_n, \dots)$ за свако $n \in \mathbf{N}$, па је сваки број $a_n$ његова тачка нагомилавања. ▲

Како, дакле, низ може имати бесконачно много тачака нагомилавања, нетривијално је питање да ли међу њима постоје највећа и најмања. Одговор на то, као и на питање о постојању бар једне тачке нагомилавања произвољног низа даје следећа теорема чији доказ овде не наводимо.

**Теорема 17.** (а) Сваки низ реалних бројева има бар једну (коначну или бесконачну) тачку нагомилавања.

(б) Међу његовим тачкама нагомилавања увек постоје најмања и највећа.

У претходном исказу подразумева се да је $-\infty < x < +\infty$ за свако $x \in \mathbf{R}$. Својства низова из наведене теореме оправдавају увођење следећих појмова.

**Дефиниција 13.** Нека је $(a_n)$ низ реалних бројева и нека су $\ell$ и $L$ његова најмања, односно највећа тачка нагомилавања (оне могу бити реални бројеви или симболи $+\infty$, $-\infty$). Елемент $\ell$ називамо **доњи лимес** или **лимес инфериор** низа $(a_n)$ и означавамо са $\liminf a_n$ или $\varliminf a_n$. Елемент $L$ називамо **горњи лимес** или **лимес супериор** низа $(a_n)$ и означавамо са $\limsup a_n$ или $\varlimsup a_n$.

Према реченом, за низове из примера 47 важи следеће:

1° низ $a_n = (-1)^n$ има два конвергентна подниза $a_{2k} = 1$ и $a_{2k-1} = -1$ чијим члановима се исцрпљују сви чланови низа, па он има тачно две тачке нагомилавања – бројеве $1$ и $-1$. Он, дакле, нема лимес, али је $\varlimsup a_n = 1$ и $\varliminf a_n = -1$;

2° низ $a_n = n^{(-1)^n}$ такође има два „карактеристична“ подниза, при чему је $a_{2k} = 2k \to +\infty$ и $a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \to 0$, па су тачке нагомилавања овог низа $0$ и $+\infty$ и прва од њих је његов доњи, а друга горњи лимес.

**Пример 49.** Посматрајмо низ $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$. Његови „карактеристични“ подnизови су

$$a_{2k-1} = 1 \to 1, \qquad a_{4k} = 1 + \frac{4k}{4k+1} \to 2, \qquad a_{4k-2} = 1 - \frac{4k-2}{4k-1} \to 0.$$

Дакле, тачке нагомилавања овог низа су $0$, $1$ и $2$, па је $\varlimsup a_n = 2$ и $\varliminf a_n = 0$. ▲

Разматрање поднизова датог низа је понекад потребно и у случајевима када низ има граничну вредност.

**Пример 50.** Доказати да је низ $(a_n)$, дефинисан са $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+2}{a_n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, конвергентан и наћи му лимес.

*Решење.* Ако бисмо знали да низ конвергира, његову граничну вредност $a$ бисмо лако нашли: прелазом на лимес у дефиниционој релацији добили бисмо да је $a = \dfrac{a+2}{a+1}$, одакле би следило $a^2 = 2$. Како су сви чланови низа ненегативни, такав је и његов лимес, тако да би следило да је $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Такође, приметимо да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{a_n+2}{a_n+1}+2}{\dfrac{a_n+2}{a_n+1}+1} = \frac{3a_n+4}{2a_3+3}, \tag{1}$$

одакле следи да је

$$a_{n+2} - a_n = \frac{2(a_n^2-2)}{2a_n+3}. \tag{2}$$

Првих неколико чланова овог низа су $0$, $2$, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{10}{7}$, $\dfrac{24}{17}$ $\ldots$ Наслућујемо да низ није монотон, али да су такви његови поднизови $(a_{2k-1})$ и $(a_{2k})$, прецизније, да је први од њих растући, а други опадајући. Такође (с обзиром да очекујемо да је гранична вредност оба ова подниза једнака $\sqrt{2}$), требало би да је $a_{2k-1} < \sqrt{2}$ и $a_{2k} > \sqrt{2}$ за све $k \in \mathbf{N}$. Докажимо наведена тврђења математичком индукцијом.

За подниз $(a_{2k-1})$ важи $0 = a_1 < \sqrt{2}$ и $a_1 = 0 < \frac{4}{3} = a_3$ (база индукције), а из претпоставке да важи $a_{2k-1} < \sqrt{2}$ и $a_{2k-1} < a_{2k+1}$, на основу (2) следи да је $a_{2k+1} < \sqrt{2}$ и $a_{2k+1} < a_{2k+3}$ (индуктивни корак). Тиме су тврђења за подниз $(a_{2k-1})$ доказана; за подниз $(a_{2k})$ доказују се слично.

Према доказаном, поднизови $(a_{2k-1})$ и $(a_{2k})$ конвергирају – означимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = y$. Како ти поднизови задовољавају исту рекурентну везу (1), то преласком на лимес добијамо да важи $x = \dfrac{3x+4}{2x+3}$ и $y = \dfrac{3y+4}{2y+3}$. Добијена једначина има само једно ненегативно решење (једнако $\sqrt{2}$), те закључујемо да постоји лимес датог низа и да је једнак управо $\sqrt{2}$.

Поменимо да се, у овом примеру, до резултата могло доћи и налажењем експлицитног израза за општи члан низа, али да често то није случај. ▲

## 4.7. РЕДОВИ

У основном тексту уџбеника смо увели појам *реда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ са *општим чланом* $a_n$ и рекли смо да тај ред *конвергира* ако постоји коначан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где је

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *делимични збир* тог реда. У наведеном случају, кажемо да је број $S$ *збир* датог реда. У противном, дакле ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не постоји или је бесконачан, дати ред *дивергира*.

Навели смо неколико примера редова чији се делимични збирови могу релативно лако наћи, тј. написати у погодном облику за налажење збира $S$ (или доказивање да такав коначан збир не постоји), али смо одмах упозорили да је такав начин испитивања конвергенције реда прилично ретко могућ. Због тога је основни проблем теорије редова испитивање њихове конвергенције, при чему сама информација о томе може да се користи за неке додатне закључке (понекад и за налажење збира).

У овом одељку наводимо само неколико најједноставнијих резултата ове веома обимне теорије.

Почнимо једним сасвим једноставним, али врло корисним резултатом.

**Теорема 18.** Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Доказ.* С обзиром да за низ делимичних сума $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbf{R}$, то је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. ■

Дакле, услов да општи члан реда $a_n$ тежи нули је *неопходан* да би ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергирао. Задаци 149 и 161 показују да тај услов није довољан, тј. да постоје (уствари, постоје многи) редови који дивергирају иако им општи члан тежи нули. Ипак је информација коју даје теорема 18 врло корисна, јер искључује потребу разматрања многих редова.

**Пример 51.** Редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$ дивергирају јер им општи чланови не теже нули. ▲

## 1. Редови са позитивним члановима

Испитивање конвергенције редова чији општи чланови теже нули знатно је једноставније код специјалне класе редова код којих су ти чланови сталног знака. С обзиром да, као и код налажења лимеса, вредности првих коначно много сабирака реда не утичу на то да ли ће он конвергирати или не (наравно, утичу на вредност збира ако он постоји), казаћемо (помало непрецизно) да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ред са позитивним члановима* ако постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такав да је $a_n \geqslant 0$ кадгод је $n \geqslant n_0$. Прво, скоро очигледно, својство таквих редова дато је следећим тврђењем.

**Теорема 19.** Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с позитивним члановима конвергира ако и само ако је низ $(S_n)$ његових делимичних сума ограничен одозго.

*Доказ.* Због $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$ за $n \geqslant n_0$, низ $(S_n)$ је растући, па тврђење следи из теореме о монотоном низу. ■

Закључци о понашању многих редова могу се извести из следећег **правила поређења**.

**Теорема 20.** Нека је $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ за $n \geqslant n_0$. Тада:

$1^\circ$ ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

$2^\circ$ ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, онда и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

*Доказ.* $1^\circ$ Означимо са $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ делимичне збирове ових редова. Не умањујући општост разматрања, можемо претпоставити да је $n_0 = 1$, тј. да неједнакост $a_n \leqslant b_n$ важи за све $n \in \mathbf{N}$. Тада директно следи да је $S_n \leqslant S'_n$ за све $n \in \mathbf{N}$. На основу претходне теореме, ако је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентан, онда је низ $(S'_n)$ ограничен одозго; на основу претходног је онда и низ $(S_n)$ ограничен одозго, па и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

$2^\circ$ Ово тврђење је такође тачно, као контрапозиција доказаног тврђења $1^\circ$. ■

**Пример 52.** $1^\circ$ Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира. Наиме, важи

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \quad n \geqslant 2,$$

а за ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ се сасвим једноставно доказује да конвергира (и да му је збир једнак 1, в. пример 44 у уџбенику).

Поменимо да одређивање збира реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ уопште није једноставно. Својевремено (почетком XVIII века) то је био чувени *Базелски проблем* који је дуго био нерешен. Резултат

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

први је добио Ојлер, што је био уједно први од врло великог броја његових доприноса разним гранама математике.

$2^\circ$ Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ конвергира и за $x > 2$, јер је, очито, тада $\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^2}$ за све $n \in \mathbf{N}$.

$3^\circ$ Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ дивергира за $0 < x < 1$. Наиме, јасно је да важи $\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n}$ за све $n \in N$, а знамо да хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира (в. задатак 149 у уџбенику). На пример, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира.

$4^\circ$ Најзад, размотримо случај када је $1 < x < 2$ и докажимо да и тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ ред конвергира.

Нека је $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{1}{n^x}$ $m$-та делимична сума овог реда. Како су сви чланови овог реда позитивни, важи $S_m < S_{2m+1}$. Сада имамо:

$$\begin{aligned} S_{2m+1} &= \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{(2m-2)^x} + \frac{1}{(2m-1)^x} + \frac{1}{(2m)^x} + \frac{1}{(2m+1)^x} \\ &\underset{x>1}{<} \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{(2m-2)^x} + \frac{1}{(2m-2)^x} + \frac{1}{(2m)^x} + \frac{1}{(2m)^x} \\ &= 1 + \frac{2}{2^x}\left(\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{m^x}\right) = 1 + \frac{2}{2^x} \cdot S_m. \end{aligned}$$

Одавде добијамо да је $S_m < 1 + \dfrac{2}{2^x} \cdot S_m$, па $S_m < \left(1 - \dfrac{2}{2^x}\right)^{-1}$, јер је $1 - \dfrac{2}{2^x} > 0$ због $x > 1$.

Низ $(S_m)$ делимичних сума је растући и одозго ограничен, па је конвергентан, чиме смо доказали да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ конвергира.

5° Из свега наведеног закључујемо да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ конвергира ако и само ако је $x > 1$. Другим речима, функција

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

је дефинисана ако и само ако је $x > 1$. Ова функција има многе примене у разним гранама математике (посебно у теорији бројева) и обично се назива **Римановом**[1] **зета-функцијом**. ▲

**Пример 53.** Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$ дивергира. Наиме, познато је да за $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ важи $\operatorname{tg} x > x$, па је $\operatorname{tg}\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n}$ за $n \in \mathbf{N}$. Како ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ дивергира, то на основу критеријума поређења дивергира и дати ред. ▲

Испитивање конвергенције реда помоћу правила поређења често је једноставније ако се користи његова следећа последица.

**Последица 1.** Нека је $a_n \geqslant 0$ и $b_n > 0$ за $n \geqslant n_0$ и нека постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C$. Тада:

1° ако је $0 \leqslant C < +\infty$ и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

2° ако је $0 < C \leqslant +\infty$ и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира, онда и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Специјално, ако је $0 < C < +\infty$, онда редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају или дивергирају истовремено.

---

[1] B. Riemann (1826–1866), немачки математичар

*Доказ.* Доказаћемо тврђење у наведеном специјалном случају; доказ је у осталим случајевима сличан.

Нека је, дакле, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=C$ и $0<C<+\infty$. Тада за свако $\varepsilon>0$ постоји $n_0\in\mathbf{N}$, такво да за $n\geqslant n_0$ важи

$$C-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<C+\varepsilon,$$

при чему $\varepsilon$ можемо тако изабрати да је $C-\varepsilon>0$. Из претходног следи да је $(C-\varepsilon)b_n<a_n<(C+\varepsilon)b_n$ за $n\geqslant n_0$. Како множење константом не утиче на конвергенцију реда, тврђење непосредно следи применом теореме 20. ■

**Пример 54.** Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ дивергира. Наиме, важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

а хармонијски ред дивергира.

Приметимо да у овом примеру непосредна примена критеријума поређења не би дала резултат. Заиста, важи $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\dfrac{1}{n}$ за све $n\in\mathbf{N}$, па нису испуњени услови за директну примену теореме 20. ▲

## 2. Редови са члановима промењивог знака

Испитивање редова чији чланови мењају знак знатно је сложеније од оних код којих је знак (почев од неког члана) константан. Наиме, сем општег неопходног услова конвергенције, израженог теоремом 18, ништа од претходно наведеног не важи за такве редове (препуштамо читаоцу да конструише одговарајуће примере). Први корак у проучавању таквог реда је обично испитивање његове апсолутне конвергенције – овај појам се уводи следећом дефиницијом.

**Дефиниција 14.** За ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ се каже да **апсолутно конвергира** ако је конвергентан ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Без доказа наводимо следеће тврђење.

**Теорема 21.** Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ апсолутно конвергира, онда он конвергира.

Као што ћемо одмах показати, обрат теореме 21 не важи, тј. постоје редови који конвергирају, али не конвергирају апсолутно. За такве редове се каже да **условно конвергирају**. У даљем ћемо се користити следећом теоремом, помоћу које се, између осталог, могу конструисати једноставни примери условно конвергентних редова.

**Теорема 22.** [*Лајбницово правило*] Ако је $(c_n)$ опадајући низ (позитивних) реалних бројева који тежи нули кад $n\to\infty$, тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ конвергира.

*Доказ.* Делимичну суму $S_{2n}$ датог реда напишимо у облику

$$S_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2n-1} - c_{2n}),$$

одакле се види да је низ $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ растући. Из једнакости

$$S_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n}$$

следи да је, за све $n \in \mathbf{N}$, $S_{2n} \leqslant c_1$, па је тај низ одозго ограничен. Према томе, постоји коначан $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Из једнакости $S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1}$ и претпоставке да је $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ следи да је и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ збир датог реда. ∎

Редови облика $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$, $c_n > 0$, код којих чланови мењају знак наизменично, обично се зову **алтернативни редови**.

**Пример 55.** (а) Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ апсолутно конвергира, јер конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

(б) Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ конвергира на основу Лајбницовог правила, јер је очигледно алтернативан, а апсолутна вредност његовог општег члана је $c_n = \dfrac{1}{n}$ и монотоно тежи нули кад $n \to \infty$. Он не конвергира апсолутно, јер хармонијски ред дивергира. ▲

Једна важна разлика између апсолутно и условно конвергентних редова састоји се у следећем. Ако је неки ред апсолутно конвергентан, онда се његова сума неће променити после произвољне пермутације његових чланова, тј. за такве (бесконачне) збирове важи комутативни закон (доказ овог тврђења није једноставно, и ми га овде не наводимо). Међутим, за условно конвергентне редове, претходно није тачно, што ћемо илустровати наредним примером.

**Пример 56.** Према претходном примеру, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ конвергира; није тешко показати (то остављамо за задатак 174) да је његова сума једнака $\ln 2$. Извршимо у овом реду следећу промену редоследа сабирака:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots$$

и покажимо да је сума новодобијеног реда једнака $\frac{1}{2}\ln 2$.

Означимо са $S_n$ $n$-ту делимичну суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, а са $S'_n$ делимичну суму „пермутованог“ реда. Тада важи

$$\begin{aligned} S'_{3n} &= \sum_{k=1}^{n} \Big( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \Big) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Big( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \Big) \\ &= \frac{1}{2} S_{2n} \to \frac{1}{2} \ln 2, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Такође важи $S'_{3n-1} = S'_{3n} + \dfrac{1}{4n} \to \dfrac{1}{2}\ln 2$ и $S'_{3n-2} = S'_{3n-1} + \dfrac{1}{4n-2} \to \dfrac{1}{2}\ln 2$ кад $n \to \infty$, па закључујемо да је и $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \frac{1}{2}\ln 2$, чиме је показано да је заиста сума новодобијеног реда $\frac{1}{2}\ln 2$. ▲

Претходни пример је само специјалан случај још једне важне теореме теорије редова, тзв. *Риманове теореме*, према којој *за сваки* условно конвергентан ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и *за произвољно* $b$ (реалан број или симбол $+\infty$ или $-\infty$) постоји таква пермутација низа $(a_n)$ за коју је збир новодобијеног реда једнак $b$.

## 4.8. РАЗНИ ЗАДАЦИ

**165.** Одредити све тачке нагомилавања, као и доњи и горњи лимес следећих низова:

(а) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;  (б) $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

(в) $a_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$;  (г) $a_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$;

(д) $a_n = \cos^n \dfrac{2n\pi}{3}$.

**166.** Конструисати пример низа који:

(а) нема ниједну коначну тачку нагомилавања;

(б) има тачно једну тачку нагомилавања, али није конвергентан;

(в) има за тачке нагомилавања унапред задате бројеве $a_1$, $a_2$, ... , $a_p$;

(г) има за тачке нагомилавања све реалне бројеве, као и $+\infty$ и $-\infty$.

(д) Да ли постоји низ који као скуп свих тачака нагомилавања има интервал $(0,1)$?

**167.** За дати низ $(a_n)$ реалних бројева посматрају се његови поднизови $(a_{2n})$, $(a_{2n-1})$ и $(a_{3n})$.

(а) Да ли конвергенција нека два од та три подниза повлачи конвергенцију самог низа $(a_n)$?

(б) Ако сва три посматрана подниза конвергирају, доказати да и низ $(a_n)$ конвергира.

**168.** Испитати конвергенцију низа $(x_n)$ дефинисаног помоћу

$$x_{n+1} = \frac{1}{a+x_n}, \quad n \in \mathbf{N}; \qquad x_1 = 0$$

у зависности од позитивног параметра $a$ и у случају конвергенције одредити његов лимес.

**169.** Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) = e$, тј. да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!} = e$.

**170.** (а) Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји реалан број $\theta_n$, $0 < \theta_n < 1$, такав да је

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}.$$

(б) Доказати да је број $e$ ирационалан.

**171.** Дата је свадбена торта са бесконачно много „спратова". Сваки спрат је облика ваљка висине $1\,\mathrm{dm}$, с тим да $n$-ти спрат има полупречник основе $\dfrac{1}{n}\,\mathrm{dm}$. Показати да читава торта има коначну запремину, али бесконачну површину. [Другачије формулисано: такву торту можемо да поједемо, али не можемо да је споља премажемо филом.]

**172.** Испитати конвергенцију редова:

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$; (б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p$, $p>0$.

**173.** (а) Нека је $H_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ делимична сума хармонијског реда. Доказати да је низ $x_n = H_n - \ln n$ опадајући и ограничен одоздо.

(б) Доказати да за неку константу $\gamma$ и за неки 0-низ $(\alpha_n)$ важи

$$H_n = \ln n + \gamma + \alpha_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

[Константа $\gamma$ се зове *Ојлерова константа* и приближна вредност јој је 0,577.]

(в) Користећи резултат под (б) извести резултат задатка 153 из уџбеника.

**174.** Користећи претходни задатак доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

**175.** Показати да је ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ дивергентан, мада је алтернативан и општи члан му тежи нули.

**176.** Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова:

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; (б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{2^n}$;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; (г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$.

## 4.9. РЕШЕЊА

165. (а) $\varliminf a_n = 0$, $\varlimsup a_n = 1$; (б) $\varliminf a_n = -4$, $\varlimsup a_n = 6$; (в) $\varliminf a_n = -\infty$, $\varlimsup a_n = +\infty$; (г) $\varliminf a_n = 1$, $\varlimsup a_n = 2$; (д) $\varliminf a_n = 0$, $\varlimsup a_n = 1$.

166. (а), (б) $a_n = n$; (в) слично примеру 48; (г) низ чији су чланови сви рационални бројеви; (д) не, јер би то било у супротности са теоремом 17.

167. (а) Не, у сва три случаја. Примери: $a_n = (-1)^n$;

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{за } n = 6k+1 \text{ или } n = 6k+5, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{за } n = 6k+2 \text{ или } n = 6k+4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(б) Нека $a_{2n} \to \alpha$, $a_{2n-1} \to \beta$ и $a_{3n} \to \gamma$ кад $n \to \infty$. Како је $(a_{6n})$ подниз и низа $(a_{2n})$ и низа $(a_{3n})$, то он конвергира и ка $\alpha$ и ка $\gamma$, одакле следи да је

$\alpha = \gamma$. Слично се добија да је $\beta = \gamma$, па је и $\alpha = \beta$. Дакле, поднизови $(a_{2n})$ и $(a_{2n-1})$ конвергирају истој граници, а како они исцрпљују све чланове низа $(a_n)$, то и тај низ конвергира.

168. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ за све $a > 0$.

169. Према задатку 147 из уџбеника, низ $(a_n)$ дат у задатку конвергира. Означимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e_1$. Нека је $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Развијањем по биномном обрасцу добија се

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = 2 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right).$$

Одатле је, с једне стране, $b_n \leqslant a_n$ за све $n \in \mathbf{N}$, па и $e = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e_1$. С друге стране, за фиксирано $k < n$ следи да је

$$b_n > 2 + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right).$$

Пуштајући да $n \to \infty$, с обзиром да изрази у свим заградама теже јединици, добијамо да је $e \geqslant 2 + \sum\limits_{j=2}^{k} \dfrac{1}{j!} = a_k$ за свако $k \in \mathbf{N}$, па је и $e \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} a_k = e_1$. Дакле, $e = e_1$, што је и требало доказати.

170. (а) Означимо $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$. На основу претходног задатка је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$, тј. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$. Следи да важи:

$$\begin{aligned}
e - a_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

(последња неједнакост је еквивалентна са $n(n+2) < (n+1)^2$). Дакле, $0 < e - a_n < \dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{1}{n}$, па постоји $0 < \theta_n < 1$ за које важи $e = a_n + \dfrac{\theta_n}{n \cdot n!}$.

(б) Претпоставимо да је $e \in \mathbf{Q}$, нпр. $e = \dfrac{m}{n}$. На основу дела задатка под (а), постоји $0 < \theta_n < 1$ тако да је

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}.$$

Множењем ове једнакости са $n!$ добија се контрадикција.

171. Запремина $n$-тог „спрата“ је $\dfrac{\pi}{n^2}$, а површина његовог омотача је $\dfrac{2\pi}{n}$. Укупна запремина торте је $\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ (и она је коначна на основу примера 52), док је укупна површина $\pi+2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и она је бесконачна јер хармонијски ред дивергира.

172. (а) Конвергира; (б) дивергира; (в) конвергира за $p>2$, иначе дивергира.

173. (а) Из $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<0$ (в. задатак 150) следи да је низ $(x_n)$ опадајући. На основу истог задатка је и

$$\begin{aligned}x_n&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}>0,\end{aligned}$$

па је низ $(x_n)$ ограничен одоздо.

(б) Из (а) следи да постоји $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(H_n-\ln n)$, тј. за неки 0-низ $(\alpha_n)$ је $H_n=\ln n+\gamma+\alpha_n$, $n\in\mathbf{N}$.

(в)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}(H_{2n}-H_n)\\&\quad=\lim_{n\to\infty}(\ln 2n+\gamma+\alpha_{2n}-\ln n-\gamma-\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n)=\ln 2.\end{aligned}$$

174. Означимо са $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ $n$-ту делимичну суму датог реда. Тада је

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=H_{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=H_{2n}-H_n\to\ln 2,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Како је $S_{2n+1}=S_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}$, то и $S_{2n+1}\to\ln 2$, чиме је доказано да $S_n\to\ln 2$, $n\to\infty$.

175. Представити општи члан реда у облику

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}.$$

176. (а) Условно конвергира; (б) апсолутно конвергира; (в) условно конвергира; (г) дивергира јер општи члан не тежи нули.

## ПЕТА ГЛАВА

# ФУНКЦИЈЕ

### 5.7. ДОКАЗИ НЕКИХ ТЕОРЕМА

У овом одељку доказаћемо неке од теорема чији докази нису дати у основном тексту уџбеника.

**Теорема 7.** Нека је: 1° $B \subset \mathbf{R}$, $g\colon B \to \mathbf{R}$ и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = b$; 2° $A \subset \mathbf{R}$, $f\colon A \to B$ и за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да $0 < |x - x_0| < \delta$ повлачи $0 < |y - y_0| < \varepsilon$. Тада је $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b$.

*Доказ.* За произвољну околину $U_\eta(b)$ тачке $b$, због $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = c$ постоји околина $U_\varepsilon(y_0)$ тачке $y_0$ тако да $y \in U_\varepsilon(y_0)$, $y \neq y_0$ повлачи да је $g(y) \in U_\eta(b)$. Сада на основу претпоставке 2° добијамо да за нађену околину $U_\varepsilon(y_0)$ постоји околина $U_\delta(x_0)$ тако да $x \in U_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$ повлачи да је $y \in U_\varepsilon(y_0)$, $y \neq y_0$. Комбиновањем добијених закључака добијамо да $x \in U_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$ повлачи да је $g(f(x)) \in U_\eta(b)$, чиме је тврђење теореме доказано. ■

*Доказ релације*

$$\lim_{x\to+\infty}\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)^x = e \tag{6}$$

(наведене пре теореме 9).

Нека је $B = \mathbf{N}$ и $g_1, g_2\colon B \to \mathbf{R}$ функције дате са

$$g_1(n) = \Bigl(1+\frac{1}{n+1}\Bigr)^n, \quad g_2(n) = \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{n+1}.$$

Познато је да је $\lim\limits_{n\to\infty} g_1(n) = \lim\limits_{n\to\infty} g_2(n) = e$.

Нека је даље $A = \{\, x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 1 \,\}$, $f\colon A \to \mathbf{N}$ функција дата са $f(x) = [x]$. Очигледно је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Услови теореме 7 су испуњени, па функције

$$(g_1 \circ f)(x) = \Bigl(1+\frac{1}{[x]+1}\Bigr)^{[x]}, \quad (g_2 \circ f)(x) = \Bigl(1+\frac{1}{[x]}\Bigr)^{[x]+1}$$

имају лимес једнак $e$ кад $x \to +\infty$. Како је, међутим, за свако $x > 1$ испуњено

$$\Big(1+\frac{1}{[x]+1}\Big)^{[x]} < \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x} < \Big(1+\frac{1}{[x]}\Big)^{[x]+1},$$

то тражени закључак следи. ∎

**Теорема 10'.** Нека је $f\colon A \to \mathbf{R}$. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ за сваки низ $(x_n)$ тачака из $A \setminus \{x_0\}$ за који је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тада је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

*Доказ.* Као и код теореме 10, посматрајмо тврђење за случај кад су $x_0$ и $a$ реални бројеви. Доказаћемо његову контрапозицију.

Претпоставимо, дакле, да није $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. То значи да се може наћи околина $U_\varepsilon(a)$ тачке $a$, таква да за сваку околину $U_\delta(x_0)$ тачке $x_0$ постоји $x \in U_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$ такво да $f(x) \notin U_\varepsilon(a)$. Изаберимо низ $\frac{1}{n}$-околина тачке $x_0$, $U_{1/n}(x_0)$, $n = 1, 2, \dots$ Према претходно реченом, за свако $n$ се може изабрати $x_n \in U_{1/n}(x_0)$, $x \neq x_0$, тако да $f(x_n) \notin U_\varepsilon(a)$. Конструисани низ $(x_n)$ испуњава очигледно услове $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n \neq x_0$ ($n \in \mathbf{N}$), али $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq a$. Дакле, ако није $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, онда није испуњен услов дат у теореми. Тиме је теорема доказана. ∎

**Теорема 13.** Нека је $[a,b]$ сегмент реалне праве и $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ реална функција, дефинисана и непрекидна у свакој тачки тог сегмента. Нека је, даље, $f(a) = A$, $f(b) = B$ и $C$ било који реалан број између бројева $A$ и $B$ (дакле, $A \leqslant C \leqslant B$ или $B \leqslant C \leqslant A$). Тада постоји тачка $c \in [a,b]$, таква да је $f(c) = C$.

*Доказ.* Доказаћемо теорему у специјалном случају када је $f(a)f(b) < 0$. Општи случај лако се своди на овај специјални ако се посматра функција $g(x) = f(x) - C$.

Претпоставимо, дакле, да непрекидна функција $f$ у крајевима сегмента $[a,b]$ има вредности разних знакова – на пример, нека је $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Поделимо тај сегмент на пола тачком $\dfrac{a+b}{2}$. Ако је у тој тачки вредност функције $f$ једнака нули, њу ћемо узети за тражену тачку $c$. У супротном, један од одсечака $\Big[a, \dfrac{a+b}{2}\Big]$, $\Big[\dfrac{a+b}{2}, b\Big]$ имаће особину да на његовим крајевима функција $f$ има вредности разних знакова. Означимо тај одсечак са $[a_1, b_1]$. Са њим наставимо описани поступак (тј. поделимо га на пола итд.). Као резултат ћемо или на неком кораку добити тачку $c$ за коју је $f(c) = 0$ или ћемо добити низ уметнутих одсечака $[a_n, b_n]$ који, према Канторовом ставу (теорема 7 главе 3), има за пресек неку тачку $c \in [a,b]$. Јасно је да је при томе $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, а према конструкцији низова $(a_n)$ и $(b_n)$ је за свако $n$ испуњено $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$. Одатле следи (због непрекидности) $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0$ и $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0$, тј. $f(c) = 0$, чиме је егзистенција тачке $c$ доказана. ∎

**Теорема 14.** Нека је $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ функција дефинисана и непрекидна у свим тачкама сегмента $[a,b]$. Тада је она ограничена. Осим тога, постоје тачке $x_1, x_2 \in [a,b]$ у којима та функција достиже своју најмању, односно највећу вредност:

$$f(x_1) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \qquad f(x_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x). \tag{7}$$

*Доказ.* Доказ првог дела тврђења ове теореме (да је функција $f$ ограничена) изводи се уз коришћење неких својстава скупа $\mathbf{R}$ и његових подскупова чије познавање превазилази ниво овог додатка. Претпоставићемо да је тај део доказан и показаћемо како се онда доказује други део, тј. егзистенција тачака $x_1$ и $x_2$ са својством (7).

Скуп $B = \{\, f(x) \mid x \in [a,b]\,\}$ је, дакле, ограничен, па постоје коначни

$$m = \inf B, \quad \text{и} \quad M = \sup B.$$

Доказаћемо да на сегменту $[a,b]$ постоји тачка $x_2$, таква да је $f(x_2) = M$; тврђење за доњу границу $m$ доказује се аналогно.

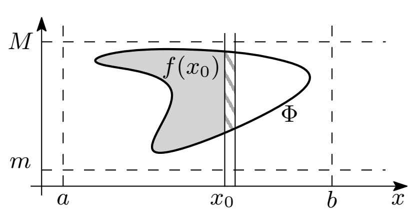
Претпоставимо, супротно тврђењу, да таква тачка $x_2$ не постоји. Тада је $f(x) < M$ за свако $x \in [a,b]$, па је функција $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрекидна на $[a,b]$. Према првом делу теореме добијамо да је функција $\varphi$ ограничена на $[a,b]$:

$$\varphi(x) \leqslant \mu, \quad x \in [a,b] \quad \text{за неко } \mu > 0.$$

Одатле је, међутим, $f(x) \leqslant M - \dfrac{1}{\mu}$ за све $x \in [a,b]$, па је број $M - \dfrac{1}{\mu}$, који је мањи од $M$, мајоранта скупа $B$, супротно дефиницији броја $M$. Ова контрадикција доказује тврђење. ■

## 5.8. НЕКЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ ПРИМЕНЕ НЕПРЕКИДНОСТИ

Својства непрекидних функција (посебно, теорема 13) имају лепе и занимљиве примене у одређеним геометријским проблемима; у овом одељку ћемо навести неке од њих. Притом ћемо користити неке појмове, као што су „повезана фигура у равни“, „површина равне фигуре“, „дијаметар скупа“ и сличне, који су интуитивно јасни, али који се не могу прецизно дефинисати на овом нивоу.



Сл. 72

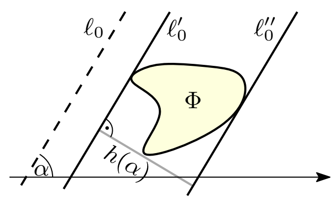
**Пример 93.** Нека је $\Phi$ ограничена и повезана фигура у $xOy$ равни, површине $P$. Тада постоји права паралелна $y$-оси која дели фигуру $\Phi$ на два дела једнаких површина.

*Доказ.* Како је $\Phi$ ограничена фигура, постоје бројеви $a, b$ и $m, M$, такви да је $a < b$, $m < M$ и да је $\Phi$ садржана у правоугаонику $[a,b] \times [m,M]$, слика 72. Нека је $H^-_{x_0} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant x_0\}$ затворена полураван „лево“ од праве $x = x_0$. Дефинишимо функцију $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ помоћу $f(x_0) = P(H^-_{x_0} \cap \Phi)$, тј.

$f(x_0)$ је површина оног дела фигуре $\Phi$ који се налази лево од праве $x = x_0$. Приметимо да је $f(a) = 0$ и $f(b) = P$. Такође, $f$ је непрекидна функција – заиста, важи $|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqslant |h|(M-m) < \varepsilon$ кадгод је $|h| < \frac{\varepsilon}{M-m}$, па по теореми 13 постоји $c \in [a,b]$ тако да је $f(c) = P/2$, чиме је доказ завршен. ▲

**Пример 94.** (Урисон[1]) Око сваке ограничене фигуре $\Phi$ у равни могуће је описати квадрат.

*Доказ.* Нека је $\ell_0$ произвољна права у равни фигуре $\Phi$ која ту фигуру не сече. Уведимо прво појам *праве ослонца фигуре $\Phi$ у правцу $\ell_0$* – то је права која је паралелна правој $\ell_0$, има непразан пресек са фигуром $\Phi$, и цела фигура $\Phi$ (сем тачака пресека) налази се са једне стране те праве. Очигледно постоје две праве ослонца у правцу $\ell_0$: $\ell_0'$ и $\ell_0''$, слика 73(а).

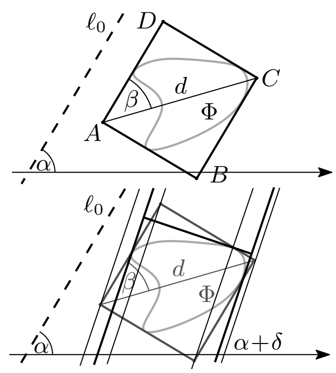


Сл. 73(а)

Нас ће занимати растојање $h(\alpha)$ између правих ослонца у правцу $\ell_0$, у зависности од угла $\alpha$ који права $\ell_0$ гради са позитивним смером $x$-осе. Приметимо да је $h(\alpha)$ дефинисано за свако $\alpha$ и да је $h(\alpha+\pi) = h(\alpha)$.

Нека је $ABCD$ правоугаоник, такав да су $AD$ и $BC$ праве ослонца фигуре $\Phi$ у правцу праве $\ell_0$, а $AB$ и $CD$ су праве ослонца нормалне на $\ell_0$, сл. 73(б). Означимо $d = AC$ и $\beta = \measuredangle CAD$. Тада је $h(\alpha) = d\sin\beta$.

Посматрајмо сада шта се дешава када увећамо угао $\alpha$ за неки мали угао $\delta$. Конструишимо праве које заклапају угао $\alpha+\delta$ са позитивним смером $x$-осе, кроз сва темена $A$, $B$, $C$, $D$. Са слике 73(в) се види да растојање $h(\alpha+\delta)$ није мање од растојања ових правих које садрже $B$ и $D$ и да није веће од растојања ових правих које садрже $A$ и $C$.



Сл. 73(б,в)

Растојање између првог пара правих је $d\sin(\beta-\delta)$, док је растојање између другог пара $d\sin(\beta+\delta)$, па је $d\sin(\beta-\delta) \leqslant h(\alpha+\delta) \leqslant d\sin(\beta+\delta)$ Сада није тешко проценити разлику $h(\alpha+\delta) - h(\alpha)$:

$$d\sin(\beta-\delta) - d\sin\beta \leqslant h(\alpha+\delta) - h(\alpha) \leqslant d\sin(\beta+\delta) - d\sin\beta.$$

Користећи идентитет $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ добијамо:

$$d\sin(\beta-\delta) = 2d\cos\frac{2\beta-\delta}{2}\sin\frac{-\delta}{2} \geqslant -2d\sin\frac{\delta}{2},$$
$$d\sin(\beta+\delta) = 2d\cos\frac{2\beta+\delta}{2}\sin\frac{\delta}{2} \leqslant 2d\sin\frac{\delta}{2},$$

[1] П. С. Урисон (1898–1924), руски математичар

па следи $-2d\sin\dfrac{\delta}{2}\leqslant h(\alpha+\delta)-h(\alpha)\leqslant 2d\sin\dfrac{\delta}{2}$. Лако се види да, ако је $\delta<0$, онда важи $2d\sin\dfrac{\delta}{2}\leqslant h(\alpha+\delta)-h(\alpha)\leqslant -2d\sin\dfrac{\delta}{2}$. Коначно,

$$|h(\alpha+\delta)-h(\alpha)|\leqslant 2d\sin\left|\frac{\delta}{2}\right|,$$

па функција $h$ јесте непрекидна.

Посматрајмо сада непрекидну функцију $f(\alpha)=h(\alpha+\frac{\pi}{2})-h(\alpha)$. Важи

$$f\Big(\alpha+\frac{\pi}{2}\Big)=h(\alpha+\pi)-h\Big(\alpha+\frac{\pi}{2}\Big)=h(\alpha)-h\Big(\alpha+\frac{\pi}{2}\Big)=-f(\alpha),$$

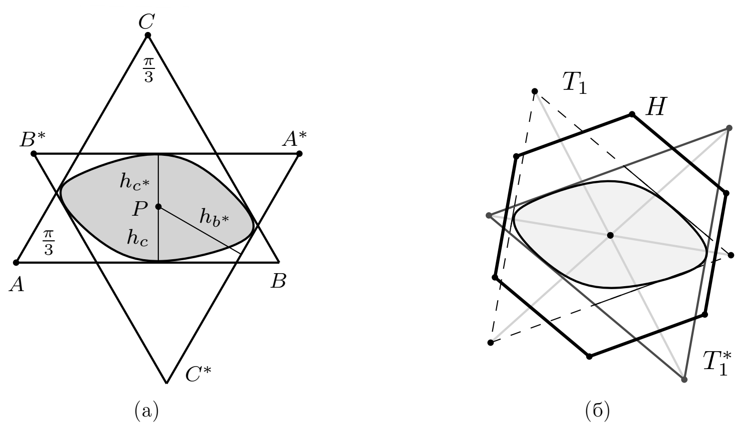
па важи $f(\alpha)f(\alpha+\frac{\pi}{2})\leqslant 0$. По теореми 13 постоји $\gamma\in[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{2}]$ тако да је $f(\gamma)=0$, тј. $h(\gamma)=h(\gamma+\frac{\pi}{2})$, чиме је доказ завршен. ▲

**Пример 95.** (Јунг[2]) (а) Сваки конвексан скуп у равни чији је дијаметар $D=1$ може се покрити једнакостраничним троуглом странице $a=\sqrt{3}$.

(б) Сваки конвексан скуп у равни чији је дијаметар $D=1$ може се покрити правилним шестоуглом странице $a=1/\sqrt{3}$.

*Доказ.* Овде ћемо представити само идеју доказа; изоставићемо доказе непрекидности функција које конструишемо, који су слични као у претходна два примера.

(а) Подсетимо се прво да, ако је $P$ произвољна тачка у унутрашњости једнакостраничног троугла, тада је збир растојања од тачке $P$ до страница троугла једнак висини тог троугла (израчунати површину троугла на два начина).




Сл. 74

Нека је сада $T$ неки једнакостраничан троугао чије су све странице праве ослонца фигуре $\Phi$; означимо његова темена са $A$, $B$ и $C$. Нека је $A^*B^*C^*$ троугао чије су све странице паралелне страницама $\triangle ABC$, и такође су праве ослонца, сл. 74(а). Нека је $P$ произвољна тачка која припада фигури $\Phi$; означимо

[2] H. Jung (1876–1953), немачки математичар

њено растојање до странице $x$ са $h_x$, при чему је $x \in \{a, b, c, a^*, b^*, c^*\}$. Тада, због услова задатка, имамо да је $h_a + h_{a^*} \leqslant 1$, $h_b + h_{b^*} \leqslant 1$, $h_c + h_{c^*} \leqslant 1$, па је

$$h_a + h_b + h_c + h_{a^*} + h_{b^*} + h_{c^*} \leqslant 3,$$

тј. $h + h^* \leqslant 3$, где су $h$ и $h^*$ дужине висина $\triangle ABC$ и $\triangle A^*B^*C^*$, редом. Одавде је $\min\{h, h^*\} \leqslant \frac{3}{2}$, па је $\min\{a, a^*\} \leqslant \sqrt{3}$.

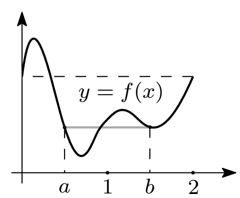
(б) Означимо са $d_{T,T^*}$ разлику између дужине странице троугла $T$ и дужине странице одговарајућег (*дуалног*) троугла $T^*$ који су уведени у делу (а). Слично као у претходним примерима доказује се да је $d_{T,T^*}$ непрекидна функција угла који једна од страница троугла $T$, рецимо $AB$, гради са $x$-осом. Како ротацијом правца $AB$ за угао $\pi$ троугао $T$ постаје $T^*$ и $d_{T^*,T} = -d_{T,T^*}$, постоји пар одговарајућих (дуалних) троуглова $T_1$ и $T_1^*$ чије су странице $a_1 = a_1^* \leqslant \sqrt{3}$. Означимо са $H$ правилни шестоугао, чије су странице паралелне страницама ових троуглова, такав да је растојање између парова паралелних страница једнако 1 и који има исти центар симетрије као пар $T_1$, $T_1^*$, сл. 74(б). Тада је $\Phi \subseteq T_1 \cap T_1^* \subseteq H$, чиме је доказ завршен. ▲

**Пример 96.** (Лема о тетиви) Нека је $f : [0,2] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција и важи $f(0) = f(2)$. Доказати да постоји $\{a, b\} \subset [0,2]$ тако да важи $b - a = 1$ и $f(a) = f(b)$. Другим речима, график функције $y = f(x)$ има тетиву дужине 1 паралелну са $x$-осом.

*Доказ.* Посматрајмо функцију

$$g\colon [0,1] \to \mathbf{R}, \quad g(x) = f(x+1) - f(x).$$

Функција $g$ је непрекидна и важи $g(0) = f(1) - f(0)$, $g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -g(0)$. Следи $g(0) \cdot g(1) \leqslant 0$, па по теореми 13 постоји $a \in [0,1]$ тако да је $g(a) = 0$. Одавде добијамо $b = a + 1$ и $f(b) - f(a) = 0$, сл. 75.



Сл. 75

На крају ћемо навести и доказати специјалан случај једне веома важне теореме, **Брауерове**[3] **теореме о фиксној тачки** и кратко поменути неке њене занимљиве последице.

**Дефиниција 13.** Нека је дата функција $f\colon A \to A$. Тачка $x \in A$ се назива **фиксном тачком функције $f$** ако је $f(x) = x$.

На пример, функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ има тачно две фиксне тачке, $x = 0$ и $x = 1$, док функција $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 1$ нема фиксних тачака.

**Теорема 15.** Било која непрекидна функција $f\colon [a,b] \to [a,b]$ има бар једну фиксну тачку.

*Доказ.* Посматрајмо функцију $g(x) = f(x) - x$, која је непрекидна као разлика двеју непрекидних функција. Имамо да је $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ и

[3] L. E. J. Brouwer (1881–1966), холандски математичар

$g(b) = f(b) - b \leqslant 0$, па по теореми 13 постоји тачка $c \in [a,b]$, таква да је $g(c) = 0$. Другим речима, $c$ је фиксна тачка функције $f$. ▲

Брауерова теорема у општем облику (који овде не наводимо) има више различитих доказа, од којих је један комбинаторни и користи Шпернерову[4] лему која је позната многим такмичарима. Примене ове теореме су многобројне, и то у разним областима, од топологије, преко теорије игара (Нешова[5] равнотежа), до комбинаторних проблема. Овде ћемо навести само неке примере за које сматрамо да могу бити занимљиви ученицима.

- Ако имамо два листа папира који се налазе један преко другог, па згужвамо горњи папир, и тако згужваног га ставимо на доњи папир, тада увек постоји тачка горњег листа која је директно изнад одговарајуће тачке доњег листа.
- Након што промешамо млеко у шољи, када се течност смири, постојаће „кап“ која ће после мешања бити на истом месту као и пре.
- У сваком тренутку на Земљи постоје две антиподалне тачке са истом температуром и ваздушним притиском.

## 5.9. РАЗНИ ЗАДАЦИ

**109. Риманова функција** $\mathcal{R}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дефинисана је помоћу

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{за } x = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q},\ (m,n) = 1; \\ 0, & \text{за } x \notin \mathbf{Q} \text{ или } x = 0. \end{cases}$$

Доказати да је функција $\mathcal{R}$ прекидна у свакој рационалној тачки $x_0 \neq 0$, а непрекидна у $x_0 = 0$ и у свакој тачки $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

**110.** Нека су $f,\ g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрекидне периодичне функције са заједничким периодом $T$ и нека је $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$. Доказати да за све $x \in \mathbf{R}$ важи $f(x) = g(x)$.

**111.** Одредити све непрекидне функције $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ које за све $x, y \in \mathbf{R}$ задовољавају услов:

(а) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; (б) $g(x+y) = g(x)g(y)$.

**112.** Нека је $\Phi$ конвексна ограничена фигура у равни, површине $P$. Тада постоје две међусобно нормалне праве које деле фигуру $\Phi$ на четири дела једнаких површина. Доказати.

**113.** Нека је $f : [0,2] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Доказати да постоји $\{a,b\} \subset [0,2]$ тако да важи $b - a = 1$, $f(b) - f(a) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$. Другим речима,

[4] E. Sperner (1905–1980), немачки математичар

[5] J. F. Nash (1928–2015), амерички математичар

график функције $y = f(x)$ има тетиву дужине 1 паралелну са тетивом чије су крајње тачке $(0, f(0))$ и $(2, f(2))$.

**114.** Нека је $f : [1,2] \to [\frac{1}{2}, 1]$ непрекидна функција. Доказати да постоји тачка $x_0 \in [1,2]$ тако да је $x_0 f(x_0) = 1$.

**115.** Нека је $f : [0,1] \to [0,1]$ непрекидна функција. Ако важи $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(f(x)) = x$ за свако $x \in [0,1]$, доказати да је $f(x) = x$ за свако $x \in [0,1]$.

**116.** Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да је $f(f(f(x))) = x$ за сваки реалан број $x$. Да ли мора да важи $f(x) = x$ за сваки реалан број $x$?

## 5.10. РЕШЕЊА

109. Нека је $x_0$ произвољан реалан број. За свако унапред задато $\varepsilon > 0$ постоји само коначно много природних бројева $n$ за које је $n < 1/\varepsilon$. То значи да постоји коначно много разломака $m/n$ (у интервалу $(x_0 - 1, x_0 + 1)$) за које је $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(m/n) = 1/n > \varepsilon$. Уочимо такву $\delta$-околину тачке $x_0$ да њој не припада ниједна од тачака $x = m/n$ (осим евентуално тачке $x_0$) за које је $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(m/n) = 1/n > \varepsilon$ (таква околина постоји јер је број тих тачака коначан). Тада је $|\mathcal{R}(x)| < \varepsilon$ чим је $0 < |x - x_0| < \delta$, без обзира да ли је $x$ рационалан или ирационалан број. Дакле, за свако $x_0$ постоји $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$. Ако је $x_0$ ирационалан број или 0, онда је по дефиницији $\mathcal{R}(x_0) = 0$, па је функција $\mathcal{R}$ непрекидна у $x_0$; ако је $x_0 \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, онда је $\mathcal{R}(x_0) \neq 0$, па је у тачки $x_0$ прекид.

110. Доказаћемо да је за произвољно $x = a$ и за произвољно $\varepsilon > 0$, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Пошто је $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, то постоји $M \in \mathbf{R}$ такав да из $x > M$ следи $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Изаберимо цео број $k$ такав да је $a + kT > M$. Тада је $|f(a + kT) - g(a + kT)| < \varepsilon$. Како су $f$ и $g$ периодичне функције са периодом $T$, то је $f(a) = f(a+kT)$ и $g(a) = g(a+kT)$, па је $|f(a) - g(a)| < \varepsilon$. Како претходна неједнакост важи за свако $\varepsilon > 0$, мора бити $|f(a) - g(a)| = 0$, тј. $f(a) = g(a)$. Ово важи за произвољно изабрано $a$, тј. $f(x) = g(x)$ важи за све реалне бројеве $x$.

111. (a) Индукцијом се лако показује да је $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ за све реалне бројеве $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Ако у овој релацији заменимо $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, добијамо

$$f(nx) = nf(x), \qquad n \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

а ако у (8) уместо $x$ пишемо $\frac{1}{n}x$, добијамо $f(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}f(x)$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$, одакле се непосредно закључује да мора бити

$$f\Big(\frac{m}{n}x\Big) = \frac{m}{n}f(x), \qquad m, n \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ако сада у датој релацији заменимо $x = 0$, $y = 0$, добићемо $f(0+0) = 2f(0)$, тј. $f(0) = 0$, а ако заменимо $y = -x$, добијамо $f(-x) = -f(x)$. Одавде закључујемо да за све рационалне бројеве $r$ важи

$$f(rx) = rf(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Означимо са $c$ вредност функције за $x = 1$, $f(1) = c$. Тада је за све $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = c \cdot r$.

Нека је $x$ произвољан ирационалан број. Тада постоји низ рационалних бројева $(r_n)$, такав да је $\lim_{n\to\infty} r_n = x$, па због непрекидности функције $f$ мора да буде

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} r_n) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot r_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} r_n = c \cdot x.$$

Дакле, мора да буде за све $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = cx$, где је $c$ нека константа. Директно се проверава да свака таква функција заиста задовољава услове задатка.[6]

(б) Смена $f(x) = \ln g(x)$. Решење: $g(x) = a^x$, $a > 0$, или $g(x) \equiv 0$.

113. Посматрајмо функцију

$$g : [0,1] \to \mathbf{R}, \quad g(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

Функција $g$ је непрекидна и $g(0) = \frac{1}{2}(2f(1) - f(0) - f(2)) = -g(1)$. По теореми 13 следи да постоји $a \in [0,1]$, $g(a) = 0$. Другим речима, за $b = a+1$, $f(b) - f(a) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0))$.

114. Посматрајмо функцију $g : [1,2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = xf(x) - 1$. Ова функција је непрекидна и $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, $g(2) = 2f(2) - 1 \geqslant 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$, па по теореми 13 постоји $x_0 \in [1,2]$ тако да је $g(x_0) = 0$.

115. Докажимо прво да је $f$ 1-1: претпоставимо да је $f(x_1) = f(x_2)$, одатле $x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2$.

Затим докажимо да оваква функција мора бити строго растућа на $[0,1]$. Претпоставимо супротно, да постоје тачке $a < b$ тако да је $f(a) \geqslant f(b)$. Како је $f(b) \in [0, f(a)]$, по теореми 13, постоји $c \in [0,a]$ тако да је $f(c) = f(b)$. Како је $c < a < b$, то функција $f$ није 1-1, што је у контрадикцији са већ доказаним.

Претпоставимо сада да је, за неко $x_0 \in (0,1)$, $f(x_0) \neq x_0$. Означимо $y_0 = f(x_0)$. Због услова задатка је $f(y_0) = x_0$ и $y_0 \neq f(y_0)$. Без умањења општости, нека је $x_0 < y_0$. Међутим, сада важи $f(x_0) = y_0 > x_0 = f(y_0)$, па $f$ није растућа.

Закључујемо да је $f(x) = x$ за свако $x \in [0,1]$.

[6] Једначина посматрана у овом задатку обично се назива Кошијевом функционалном једначином.