Реч аутора

Свеска припрема за четврти разред средње школе је намењена наставницима који раде са ученицима на економским профилима. Аутори су је замислили као помоћ наставницима која може да се мења и надограђује зависно од потреба одељења у којима се настава изводи. На крају сваке припреме остављено је место за коментаре и идеје за унапређење часа.

У Панчеву
августа 2016.

Нада Ранковић
Љиљана Ђуретановић

Припреме за часове математике за четврти разред средње школе економско – трговинског подручја рада - Економски техничар, Финансијски техничар

Редни број теме	Наставна тема	Број часова		
		Обрада	Остало	Укупно
1	Елементи финансијске математике	6	10	16
2	Функције	8	12	20
3	Извод функције	11	17	28
4.	Комбинаторика и вероватноћа	8	12	20
	Писмени задатак са исправком	-	12	12
	Укупно часова	33	63	**96**

1. Елементи финансијске математике

Појам и врсте зајмова. Амортизација зајма једнаким ануитетима и једнаким отплатама: израчунавање зајма, ануитета, каматне стопе и броја ануитета; план амортизације зајма; веза између отплата: израчунавање зајма, отплаћеног дела зајма и остатка зајма помоћу прве отплате. Конверзија зајма. Амортизација зајмова подељених на обвезнице

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Каматна стопа
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, калкулатори
Циљ часа: Понављање појма конформне каматне стопе
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају каматну стопу
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: развијање способности за брзо израчунавање различитих каматних стопа
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток часа

Уводни део часа: 10 мин.

Кратак договор о начину рада у наредној наставној години, литератури и ресурсима. Напомене о градиву које очекује ученике и критеријумима оцењивања наставника.
Ученици су у трећем разреду започели рад на финансијској математици. Сада се постављањем питања и дискусијом понављају врсте камата.

Главни део часа: 30 мин.

Номинална каматна стопа је каматна стопа која представља релативни број-проценат, која одређује колико се новчаних јединица плаћа по јединици капитала и користи се за обрачун редовне камате за дати капитал. Може бити фиксна или променљива.

За разлику од номиналне каматне стопе, **ефективна каматна стопа** (ЕКС) представља стварну цену капитала. Ефективна каматна стопа, поред номиналне каматне стопе, укључује накнаде и провизије које клијент плаћа банци за одобравање кредита. Уколико је реч о кредитима који се одобравају уз депозит, ЕКС обухвата и приход по основу камате који банка плаћа на тај депозит

Посматрајмо вашу кредитну картицу. Претпоставимо да морате платити камату на непокривене (позајмљене) износе по стопи од 2% месечно. Шта ће се догодити са тим трошковима ако пропустите да покријете те позајмице током целе године?

Важно је приметити везу између каматне стопе и броја периода. Ако је каматна стопа одређена у процентима месечно, онда морамо дефинисати број периода на који се односи наша рачуница, тј. у овом случају то је број месеци.

Тако, ако позајмите 100 евра од установе чију кредитну картицу користите, са каматом од 2% месечно, за 12 месеци ви ћете морати да платите $100 \cdot 1{,}02^{12} = 126{,}82$ евра. Дакле, ваш дуг ће нарасти после годину дана на 126,82 евра. Зато, можемо рећи да је каматна стопа од 2% месечно еквивалентна ефективној годишњој каматној стопи или годишњој сложеној стопи од 26,82%. Уопштено, ефективна годишња каматна стопа, дефинисана је као годишња стопа раста коригована сложеним интересом.
При поређењу каматних стопа, најисправније је служити се ефективним каматним стопама. Оне упоређују камате плаћене или примљене током заједничког периода (1 година) и коригују их за износ сложеног интереса.

Нажалост, каматне стопе кратких временских периода се понекад ануализирају (своде на годишње) простим множењем са бројем тих периода у години. У САД је чак и законом одређено ануализирање на тај, упрошћен начин. Такве стопе се називају годишње процентне стопе (annual percentage rates-APR). Каматна стопа за дуг по вашој замишљеној кредитној картици је 2% месечно. Пошто једна година има 12 месеци, APR на ваш дуг је 24%.

Интеркаларна камата ја камата која се обрачунава и наплаћује само за време коришћења кредита (у току грејс периода), односно до момента када се почиње са отплатом кредита. Интеркаларна камата се обрачунава за ефективни број дана од дана исплате кредита до почетка отплате кредита. Овај период обично траје до последњег дана у месецу у коме је кредит исплаћен.

Релативна каматна стопа се добија деобом номиналне годишње стопе бројем капиталисања. Проблеми у вези са применом релативне каматне стопе настају када постоји већи број капиталисања у току године:

Пример. Клијент је уложио 5000 евра у банку која плаћа 10%(pa)d. Када ће улог бити већи: ако је капиталисање годишње или полугодишње?

полугодишње: $K = 5000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{20} = 13266{,}49$ евра

годишње: $K = 5000\left(1+\frac{10}{100}\right)^{10} = 12968{,}71$ евро.

закључујемо да ће клијент имати већи интерес при полугодишњем обрачуну камате.

Конформна каматна стопа p_k је стопа по којој се добија исти износ камате без обзира да ли се камата рачуна једном на крају периода отплате или више пута у току саме отплате капитала. Дакле улог од K новчаних јединица који је уложен при капиталисању од m пута годишње има исту вредност на крају n-те године као и да је уложен при годишњем капиталисању:

$$K \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n} = K \cdot \left(1+\frac{p_k}{100}\right)^{mn}$$

$$p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right)$$

p = стопа за период у коме се тражи комформна каматна стопа
m = број капиталисања у току обрачунског периода.

Задаци

1) Годишњој стопи од 16% одреди комформну месечну стопу.

m=12 p=16% $p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1+\frac{16}{100}}-1\right) = 1{,}2245 \approx 1{,}24\%$

2) Дата је годишња каматна стопа од 25%. Израчунати одговарајуће конформне каматне стопе за дан, месец и квартал.

за дан. $p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[360]{1+\frac{25}{100}}-1\right) \approx 0{,}062\%$

за месец: $p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1+\frac{25}{100}}-1\right) \approx 1{,}877\%$

за квартал: $p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{1+\frac{25}{100}}-1\right) \approx 5{,}737\%$

3) Одредити конформну стопу за 32 дана ако годишња каматна стопа износи 86%

$$\mathrm{p_k} = 100 \left(\sqrt[365]{\left(1+\frac{86}{100}\right)^{32}}-1\right) = 5{,}591396\%$$

Завршни део часа: 5мин

Понављање врста каматних стопа.
Домаћи задатак: поновити врсте камаћења

1) Израчунати полугодишњу конформну каматну стопу за годишњу релативну стопу 6%.

$$p_k = 100 \cdot \left(\sqrt{1+\frac{6}{100}}-1\right) \approx 2{,}9563\%$$

2) Одредити кварталну конформну стопу ако је годишња стопа 54%.

$$p_k = 100\left(\sqrt[4]{1+\frac{54}{100}}-1\right) = 11,3987\%$$

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Појам и врсте зајмова. Амортизација зајмова који се отплаћују једнаким ануитетима.
Тип часа: обрада новог градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Увођење појма зајма
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: развијање способности за посматрање, подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток првог часа

Уводни део часа: 10 мин.

Зајам и **кредит** у нашем језику имају исто значење. Сама реч зајам или кредит потиче од латинске речи credo што значи верујем тј. имам поверења. Кредит је је дужничко - поверилачки однос, заснован на уступању права располагања новцем од стране поверилаца дужнику на одређено време и под одређеним условима. Дужник користи и враћа позајмљена новчана средства у одређеном временском периоду увећана за сложени интерес.

Зајам корисник враћа зајмодавцу кроз ануитете. **Ануитети** су износи који се састоје од отплатног дела и камате и исплаћују се континуирано у једнаким временским размацима.

Уговором о зајму између зајмодавца и зајмопримца регулишу се висина зајма, намена коришћења позајмљених средстава, интересна стопа, време трајања отплаћивања и други услови.

Отплата или **амортизација** кредита значи постепено враћање кредита према унапред утврђеном плану отплате, односно амортизације.

Главни део часа: 30 мин.

ЗАЈМОВИ КОЈИ СЕ АМОРТИЗУЈУ ЈЕДНАКИМ АНУИТЕТИМА: отплаћују се одређено време, постепено се даје зајмодавцу одређен број година, једном или више пута годишње, износ који садржи отплату и интерес и зове се ануитет. Радићемо зајмове код којих је обрачун камате декурзиван.

Ако све ануитете који се једнаки, а доспевају различито (први после једне године, други после две године, последњи после n година) сведемо на рок данас када се исплаћује зајам, онда зајам мора бити једнак:

$$K = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \ldots + \frac{a}{r^n}$$

$\frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r^3}, \ldots, \frac{a}{r^n}$ је геометријски низ, чији је први члан $a_1 = \frac{a}{r}$ и количник $q = \frac{1}{r}$, па је збир првих n чланова геометријског низа једнак:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{r} \frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1-\frac{1}{r}} = a \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}.$$

Пошто је $K = S_n$, следи да је: $K = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, где је K зајам, a ануитет, n број периода отплаћивања зајма, а $r = 1 + \frac{p}{100}$ интересни декурзивни чинилац. Преко интересних таблица наведени израз записујемо у облику $K = a \cdot IV_p^n$.

Из $K = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$ следи да је $a = K \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$. Преко интересних таблица наведени израз записујемо у облику $a = K \cdot V_p^n$

a- ануитет(рата) b- оплата i- камата (интерес)

$$a = b + i$$

Задаци

1) Зајам од 600000 динара отплаћује се 12 година једнаким полугодишњим ануитетима. Колико износи ануитет ако је интересна стопа 16%(pa)d и капиталисање полугодишње?

K=600000 n=24 p=8%(ps)d

ПРВИ НАЧИН: $a = 600000 \cdot V_8^{24} = 56986{,}78$ *дин*

ДРУГИ НАЧИН: $r = 1{,}08$ $\quad a = 600000 \cdot \dfrac{(1{,}08)^{24} \cdot (1{,}08-1)}{(1{,}08)^{24}-1} = 56986{,}78 дин$

2) Одреди износ зајма ако се зна да је исплаћен за 8 година једнаким тромесечним ануитетима од 5000 динара уз 16%(pa)d интереса.

a=5000 $\quad n$=32 $\quad p$=4%(pq)d

ПРВИ НАЧИН: $K = 5000 \cdot IV_4^{32} = 89367{,}76 din.$

ДРУГИ НАЧИН: $r = 1{,}04$ $\quad K = 5000 \cdot \dfrac{(1{,}04)^{32}-1}{(1{,}04)^{32}(1{,}24-1)} = 89367{,}76 din$

3) Кредит код Прокредит банке на износ 200000 динара амортизује се две године са полугодишњим декурзивним ануитетима и стопом 15%(pa)d. Ако се одговарајућа камата рачуна комформном методом, колико износи камата за први ануитет?

K=200000 $\quad n$=2 $\quad p$=15%(pa)d $\quad m$=2

$$p_k = 100 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{15}{100}} - 1 \right) = 7{,}238 \approx 7{,}24\%$$

$$i = \frac{K \cdot p}{100} = \frac{200000 \cdot 7{,}24}{100} = 14476{,}11 \text{ дин.}$$

4) Шести интерес зајма који се амортизује 16 година једнаким годишњим ануитеима уз 4%(pa)d и годишње капиталисање износи 2000 динара. Колики је анитет? Колики је зајам?

$i_6 = 2000 \qquad 2000 = \dfrac{K_6 \cdot 4}{100}$ *добијамо* $K_6 = 50000$

дакле $50000 = a \cdot IV_4^{10}$ *па је* $a = \dfrac{50000}{IV_4^{10}} = \dfrac{50000}{8{,}11089578} = 6164{,}55$

$K = a \cdot IV_4^{16} = 6164{,}55 \cdot 11{,}65229561 = 71831{,}13$ дин.

Завршни део часа: 5 мин.

Резиме градива испредаваног на часу. Понављање кључних појмова.

Ток другог часа

Уводни део часа: 5 мин.

Понављање појмова зајма, ануитета, камате, отплате. Понављање појма линеарне интерполације.

Главни део часа: 35 мин.

(*Како би рад на изради кредита био практичнији користићемо финансијске таблице за израду планова отплате зајма. Финансијске таблице ученици могу користити и преко рачунара или телефона. Уколико постоји могућност користити рачунаре и Excel за израду амортизационог плана.)*

Приликом израде плана отплате кредита користићемо табелу која садржи следеће колоне:

- **ПЕРИОД** означава период у коме је дошло до новчаног тока. У првом периоду се налази износ одобреног зајма
- **ИЗНОС ДУГА НА ПОЧЕТКУ ПЕРИОДА** – тренутно стање дуга $K_c = K_{c-1} - b_{c-1}$
- **ИНТЕРЕС** је износ камате на дуг са почетка периода *c* и рчуна се на следећи начин: $i_c = \dfrac{K_c \cdot p}{100}$
- **ОТПЛАТА** је износ којим се враћа део зајма $b_c = a - i_c$
- **АНУИТЕТ** је рата односно сума оплате и камате за дати период отплате зајма $a = K \cdot V_p^n$

  $K_c = K_{c-1} - b_{c-1}$

Пример 1. Зајам од 40000 динара отплаћује се три године једнаким шестомесечним ануитетима. Интересна стопа је 20%(pa)d и капиталисање полугодишње. Направити амортизациони план.

p=10%(ps)d

$a = K \cdot V_{10}^6 = 40000 \cdot 0.22960738 = 9184{,}2952$ *дин* или $a = K \cdot \dfrac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$,

$r = 1 + \dfrac{10}{100} = 1{,}1$

први период: $c = 1$

Интерес на крају првог полугодишта: $i_1 = \dfrac{40000 \cdot 10}{100} = 4000$

Отплату ћемо обележити са b. Отплата је једнака разлици ануитета и интереса $b_1 = a - i_1 = 9184{,}2952 - 4000 = 5184{,}2952$.

После првог полугодишта дуг се смањио за износ отплате па износи $K_2 = K_1 - b_1 = 40000 - 5184{,}2952 = 34815{,}7048$

други период: $c = 2$

Интерес на крају другог полугодишта: $i_2 = \dfrac{34815{,}7 \cdot 10}{100} = 3481{,}57$

$b_2 = a - i_2 = 9184{,}2952 - 3481{,}57 = 5702{,}72$.

После другог полугодишта дуг се смањио за износ отплате па износи $K_3 = K_2 - b_2 = 34815{,}7 - 5702{,}72 = 34815{,}7048$

На наведени начин рачунамо вредности и уносимо у амортизациони план:

полугодиште	Дуг на почетку полугодишта	Интерес на крају полугодишта	Отплата на крају полугодишта	Ануитет
1	40000,00	4000,00	5184,30	9184,30
2	34815,70	3481,57	5702,72	9184,30
3	29112,98	2911,30	6273,00	9184,30
4	22839,98	2284,00	6900,30	9184,30
5	15939,68	1593,97	7590,33	9184,30
6	8349,35	834,94	8349,35	9184,30
		15105,8	**40000,00**	**55105,8**

Из амортизационог плана уочавају се односи између интереса и односи између отплата. Сваки следећи интерес мањи је од претходног, јер се основа за обрачун интереса смањује из године у годину. Како су ануитети једнаки, а они садрже отплату и интерес, свака следећа отплата је већа од претходне.

Контрола ваљаности урађеног амортизационог плана може са урадити на неколико начина:

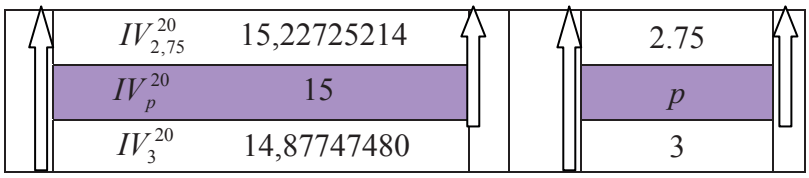
1. Збир отплата мора бити једнак зајму
2. Последња отплата једнака је остатку дуга на почетку последњег периода отплаћивања
3. Збир колоне интереса и колоне отплата једнак је збиру свих ануитета:
4. Интерес на збир колоне дуг мора бити једнак збиру интереса колоне интерес

Наведени амортизациони план се може ефикасно направити уз употребу Excela, па је неопходно дати ученицима основна упутства.

Пример 2. Зајам од 90000 треба да се амортизује за 20 година једнаким годишњим ануитетима од 6000 динара. Одредити уз коју каматну стопу је то могуће учинити.

$IV_p^{20} = \frac{a}{K} = 15$ $\qquad IV_{2,75}^{20} = 15{,}22725214$ $\qquad IV_3^{20} = 14{,}87747480$

Применићемо поступак интерполације табличних вредности познатих камата за четврте финансијске таблице (Ученици су наведени поступак радили током трећег разреда)



$$\left(IV_3^{20} - IV_{2,75}^{20}\right) : \left(IV_p^{20} - IV_{2,75}^{20}\right) = (3 - 2{,}75) : (p - 2{,}75)$$

p=2,91%(pa)d.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: (наставник ученицима дели унапред припремљене радне листиће са текстом задатка). Препоручити ученицима израду табела у Excelu, обзиром да су током претходних година научили да раде у наведеном програмском пакету.

1) Зајам од 30000 динара се амортизује шест година једнаким годишњим ануитетима. Интересна стопа је 4%(pa)d и годишње капиталисање. Израдити план амортизације.
2) Кредит пекаре "Здраво" од 2000000 динара код Комерцијалне банке се отплаћује у једнаким годишњим ануитетима са роком од 10 година уз 6%(pa)d и годишње капиталисање. Израчунати колики је ануитет пекаре "Здраво" по овом кредиту. Потом израдити план отплате (амортизације) кредита.

Решења домаћег задатка која омогућују контролу задатака на следећем часу:

1) $a = K \cdot V_4^6 = 3000000 \cdot 0{,}1907619 = 57229$

Број периода	**Дуг *K***	**Интерес**	**Отплата**
1	300000	12000	45229
2	254771	10190	47038
3	207734	8309	48919
4	158814	6353	50876
5	107939	4318	52911
6	55027	2201	55027
		43371	300000

2) $a = K \cdot V_6^{10} = 271735{,}92$

Број периода	**Дуг *K***	**Интерес**	**Отплата**
1	2000000,00	120000,00	151735,92
2	1848264,08	110895,84	160840,00
3	1687424,00	101245,44	170490,48
4	1516933,52	91016,01	180719,90
5	1336213,62	80172,80	191563,10
6	1144650,52	68679,03	203056,89
7	941593,63	56495,62	215240,30
8	726353,33	43581,20	228154,72
9	498198,61	29891,20	241844,00
10	256354,61	15381,28	256354,63
		717358,42	2000000

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Амортизација зајмова који се отплаћују једнаким ануитетима.
Тип часа: понављање, вежбање
Облици рада: фронтални, индивидуални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: рачунари, рачунарски кабинет
Циљ часа: Утврђивањење појма зајма и примена
Образовни задатак: Научити ученике да примене научено градиво
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: развијање способности за посматрање, подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола и дискусија домаћег задатка.
Поновити појам конформне каматне стопе и интеркаларне камате..

Главни део часа: 35 мин.

1) Клијент је купио намештај чија је цена 90000 динара . Уговор о потрошачком кредиту садржи следеће податке:

Номинални износ главнице	90000 динара
Депозит 20%	18000 динара
Надокнада за обраду захтева 1%	900 динара
Номинална каматна стопа	12%(pa)d
Период отплате	7 година
Број ануитета у години	4
Укупан број ануитета	28
Почетак отплате	01.05.2013.
Доспеће првог ануитета	01.07.2013.
Датум исплате кредита	18.04.2013.

Интеркаларне камате теку од дана исплате кредита 18.04.2013. до почетка отплате 01.05.2013.
Банка је 01.01.2016. смањила камату са 12%(pa)d на 10%(pa)d.

Израчунати:

а) кварталну конформну каматну стопу за годишњу стопу од 12%(pa)d
б) квартални ануитет
в)за период од 01.01.2016. кварталну конформну каматну стопу за годишњу стопу од 10%(pa)d
г) нови тромесечни ануитет
д) амортизациони план
ђ) интеркаларне камате
е) укупне трошкове кредита

Решење:

а) $p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{12}{100}\right)^3} - 1 \right) = 2{,}873734472$

б) $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{2{,}873734472}{100} = 1{,}028737345$

$$a = K \cdot \frac{r^n (r-1)}{r^n - 1} = 4722{,}65$$

в) $p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{\left(1+\frac{10}{100}\right)^3} - 1 \right) = 2{,}411368908$

г) $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{2{,}411368908}{100} = 1{,}0241136890\,8$

$$a = K \cdot \frac{r^n (r-1)}{r^n - 1} = 4547{,}77$$

ђ) Интеркаларна камата (за 13 дана, од 18.04.2013. до 01.05.2013.)

$$I_{IK} = 90000 \cdot \left(\left(1+\frac{12}{100}\right)^{\frac{13}{360}} - 1 \right) = 369{,}07$$

д) Приказ амортизационог плана израђеног у Excel - у

број периода	Датум доспећа	дуг на почетку квартала	интерес на крају квартала	отплата на крају квартала	ануитет
1	01.07.2013.	90000	2586.36	2136.29	4722.65
2	01.10.2013.	87863.71	2524.97	2197.68	4722.65
3	01.01.2014.	85666.03	2461.81	2260.84	4722.65
4	01.04.2014.	83405.20	2396.84	2325.81	4722.65
5	01.07.2014.	81079.39	2330.01	2392.64	4722.65
6	01.10.2014.	78686.75	2261.25	2461.40	4722.65
7	01.01.2015.	76225.34	2190.51	2532.14	4722.65
8	01.04.2015.	73693.21	2117.75	2604.90	4722.65
9	01.07.2015.	71088.30	2042.89	2679.76	4722.65
10	01.10.2015.	68408.54	1965.88	2756.77	4722.65
11	01.01.2016.	65651.77	1886.66	2835.99	4722.65
12	01.04.2016.	62815.78	1514.72	3033.05	4547.77
13	01.07.2016.	59782.73	1441.58	3106.19	4547.77
14	01.10.2016.	56676.54	1366.68	3181.09	4547.77
15	01.01.2017.	53495.45	1289.97	3257.80	4547.77
16	01.04.2017.	50237.66	1211.42	3336.35	4547.77
17	01.07.2017.	46901.30	1130.96	3416.81	4547.77
18	01.10.2017.	43484.50	1048.57	3499.20	4547.77
19	01.01.2018.	39985.30	964.19	3583.58	4547.77
20	01.04.2018	36401.72	877.78	3669.99	4547.77
21	01.07.2018.	32731.73	789.28	3758.49	4547.77
22	01.10.2018.	28973.24	698.65	3849.12	4547.77
23	01.01.2019.	25124.12	605.84	3941.93	4547.77
24	01.04.2019.	21182.19	510.78	4036.99	4547.77
25	01.07.2019.	17145.20	413.43	4134.34	4547.77
26	01.10.2019.	13010.86	313.74	4234.03	4547.77
27	01.01.2020.	8776.83	211.64	4336.13	4547.77
28	01.04.2020.	4440.71	107.08	4440.71	4547.77
			39261.26	**90000.00**	**129261.24**

е) Укупни трошкови кредита:

Надокнада за обраду захтева 1%	900 динара
Интеркаларна камата	369.07 динара
Збир камата у ануитетима	39261,26 динара
Укупно:	**40530.33 динара**

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: (наставни листић са текстом задатка и упутством)

1) Банка је одобрила зајам од 300000 евра на четири године кориснику уз 8%(pa)d, једнаке декурзивне ануитете и грејс период од годину дана. Интеркаларне камате се обрачунавају и додају износу зајма у почетку отплате зајма. Направити амортизациони план.

$$r = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$$

Интеркаларна камата је једнака разлици вредности зајма након годину дана и одобреног зајма:

$$I_{IK} = K \cdot r - K = 300000(1{,}08 - 1) = 24000$$

Када интеркаларну камату додамо зајму добијамо износ зајма који ће клијент враћати: 324000 евра

Решење:

Амортизациони план, помоћу којег наставник контролише домаћи задатак.

$$a = K \cdot V_p^n = 97822{,}34$$

број периода	дуг на почетку године	интерес на крају године	отплата на крају године	ануитет
1	324000	25920	71902.34	97822.34
2	252097.7	20167.81	77654.53	97822.34
3	174443.1	13955.45	83866.89	97822.34
4	90576.24	7246.099	90576.24	97822.34
		67289.36	324000	391289.4

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Зајмови који се отплаћују једнаким ануитетима.
Тип часа: понављање, вежбање
Облици рада: фронтални, индивидуални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни материјал, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Утврђивањеење појма зајма и контрола зајма
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе школовање из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: развијање способности за посматрање, подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток првог часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

$a = b_c \cdot r^{n-c+1}$, $r = 1 + \frac{p}{100}$ или $a = b_c \cdot I_p^{n-c+1}$ **однос између ануитета и отплата**

$b_m = b_c \cdot r^{m-c}$, $r = 1 + \frac{p}{100}$ или $b_m = b_c \cdot I_p^{m-c}$ **однос између отплата** $m > c$

1) Зајам се отплаћује 12 година једнаким годишњим ануитетима. уз 15%(pa)d интереса и годишње капиталисање. Пета отплата зајма износи 5000 динара. Израчунати седму и десету отплату, зајам и ануитет.

$b_5 = 5000 din.$ n=12 p=15%(pa)d

$b_7 = b_5 \cdot I_{15}^{2} = 6612{,}5din.$ $\qquad$ $b_{10} = b_5 \cdot I_{15}^{5} = 10056{,}79din.$

$a = b_5 \cdot I_{15}^{12-5+1} = 15295{,}11din.$ $\qquad$ $K = a \cdot IV_{15}^{12} = 82908{,}96din$

2) Зајам се отплаћује 12 година једнаким полугодишњим ануитетима. уз 8%(pa)d интереса и полугодишње капиталисање. Осма отплата зајма износи 2000 динара. Колико износи укупно плаћена камата у току амортизације зајма?

$a = b_8 \cdot I_4^{24-8+1} = 3895{,}80din.$ $\qquad$ $K = a \cdot IV_4^{24} = 59399{,}12din$

$\sum i = na - K = 34100{,}08din.$

3) Збир друге и четврте отплате зајма износи 59617,24 динара. Одредити износ зајма који је одобрен ако се он амортизује пет година једнаким ануитетима уз 12%(pa)d.

$b_2 + b_4 = 59617{,}24$ $\qquad$ $r = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}12$ $\qquad$ $a = b_1 \cdot r^5 = 23611{,}46 \cdot 1{,}12^5$

$b_1 \cdot r + b_1 \cdot r^3 = 59617{,}24$

$b_1 \cdot \left(r + r^3\right) = 59617{,}24$ $\qquad$ $K = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = 150000$ динара

$b_1 = \frac{59617{,}24}{1{,}12 + 1{,}12^3} = 23611{,}46$

4) Зајам од 50000 динара амортизује се годишњим ануитетима од 4000 динара уз стопу 4%(pa)d и годишње капиталисање. Израчунати последњи ануитет.

$K = a \cdot IV_p^n \quad \Rightarrow \quad IV_4^n = \frac{K}{a} = 12{,}5$ $\qquad$ $17 < n < 18$

Дакле, дати зајам има 17 једнаких ануитета, а осамнаести ануитет рачунамо на следећи начин:

$a_{18} = \left(K - a \cdot IV_p^{n-1}\right) \cdot I_p^n$ $\qquad$ $a_{18} = \left(50000 - 4000 \cdot IV_4^{17}\right) \cdot I_4^{18} = 2709{,}17din.$

$O_c = b_1 \cdot \left(1 + III_p^{c-1}\right)$ **Израчунавање отплаћеног дела дуга са првих *c* отплата**

5) Зајам се отплаћује једнаким полугодишњим ануитетима од 10000 динара осам година уз 15%(pa)d. Израчунати:

а) Колико дуга је отплаћено са првих 7 ануитета?

б) Колико је отплаћено од 10. закључно са 15. ануитетом?

в) Колики је зајам?

$a = 10000din$ $\qquad$ $n = 16$ $\qquad$ $p = 7{,}5$ %(ps)d

$a = b_1 \cdot I_{7,5}^{16-1+1}$ $\qquad$ $b_1 = \frac{a}{I_{7,5}^{16}} = 3143{,}87din.$

а) $O_7 = b_1 \cdot \left(1 + III_{7,5}^{6}\right) = 27626{,}20din$

б) $O_{15} - O_9 = b_1 \cdot \left(1 + III_{7,5}^{14}\right) - b_1 \cdot \left(1 + III_{7,5}^{8}\right) = 43663{,}69 din.$

в) $K = a \cdot IV_{7,5}^{16} = 91415{,}07 din.$

Завршни део часа: 5 мин.

(наставник ученицима дели унапред припремљене радне листиће са текстом задатка).

Домаћи задатак:

1) Зајам од 300000 динара отплаћује се 8 година једнаким годишњим ануитетима. Каматна стопа је 8%(pa)d и годишње капиталисање. Одредити ануитет и пету отплату.

(Решење $a = K \cdot V_8^8 = 3000000 \cdot 0{,}174014 = 52204 din$

$a = b_1 \cdot I_8^{8-1+1}$ $\qquad b_1 = \dfrac{52204}{0{,}174014} = 28204$

$b_5 = b_1 \cdot I_8^4 = 28204 \cdot 1{,}360488 = 38371$)

Ток другог часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1) Зајам се отплаћује 16 година једнаким годишњим ануитетима уз 5%(pa)d камате и годишње капиталисање. Отплаћени део дуга после 10 плаћених ануитета износи 50000 динара. Одредити зајам.

$O_{10} = b_1 \cdot \left(1 + III_5^9\right)$ $\qquad b_1 = 3975{,}23$

$a = b_1 \cdot I_5^{16-1+1} = 8677{,}43 din$

$K = a \cdot IV_5^{16} = 94043{,}99 din$

Израчунавање остатка дуга после плаћених *c* ануитета.

$$R_{n-c} = a \cdot IV_p^{n-c} \qquad R_{n-c} = K - O_c$$

2) Седма отплата зајма који се амортизује 10 година једнаким полугодишњим ануитетима уз 18%(pa)d интереса и полугодишње капиталисање износи 10000 динара. Израчунати:

а) Зајам

б) Отплаћени део дуга после плаћених 12 ануитета
в) Остатак дуга после плаћених 12 ануитета
г) Направити амортизациони план за последњи период амортизације зајма.

а) $a = b_7 \cdot I_9^{20-7+1} = 33417{,}27 din.$ $\qquad K = a \cdot IV_9^{20} = 305051{,}07 din.$

б) $b_1 = \dfrac{b_7}{I_9^6} = 5962{,}67 din$ $\qquad O_{12} = b_1 \cdot \left(1 + III_9^{11}\right) = 120092{,}47 din$

в) $R_{20-12} = K - O_{12} = 184958{,}60 din$

г)

n	дуг	камата	отплата
20	30658	2759	30658

$K_{20} = R_{20-19} = a \cdot IV_9^{20-19} = 30658{,}05 din$

3) Зајам од 40000 динара отплаћује се 10 година једнаким полугодишњим ануитетима уз стопу 4%(pa)d и полугодишње капиталисање. Направити амортизациони план за последњу годину амортизације зајма.

n	K	i	b
19	4749,60	94,99	2351.29
20	2398,31	47,97	2398,31

$K_{19} = R_{20-18} = a \cdot IV_2^{20-18} = 4749{,}60 din$ $\qquad a = K \cdot V_2^{20} = 2446{,}28 din$

4) Зајам се отплаћује 20 година једнаким годишњим ануитетима уз стопу 4%(pa)d и годишње капиталисање. Остатак дуга после 15 плаћених ануитета је 24000 динара. Направити амортизациони план за прву годину амортизације зајма.

$R_{20-15} = a \cdot IV_4^{20-15} \quad \Rightarrow \quad a = 5391{,}05 din$ $\qquad K = a \cdot IV_4^{20} = 73266{,}13 din$

n	дуг	камата	отплата
1	73266,13	2930,65	2460,40

5) Зајам се отплаћује 12 година једнаким годишњим ануитетима уз стопу 10%(pa)d и годишње капиталисање. Камата за осму годину износи 10000 динара. Направити амортизациони план за последњу годину амортизације зајма.

$i_8 = 10000 din$ $\qquad i_c = \dfrac{R_{n-c+1} \cdot p}{100} \quad \Rightarrow \quad R_{12-8+1} = \dfrac{i_8 \cdot 100}{10} = 100000 din$

$R_{12-7} = a \cdot IV_{10}^{12-7} \quad \Rightarrow \quad a = 26379{,}75 din$

$$R_{12-11} = a \cdot IV_{10}^{12-11} \quad \Rightarrow \quad K_{12} = R_{12-11} = 23981{,}59 din$$

n	дуг	камата	отплата
12	23981,59	2398,16	23981,59

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: (наставник ученицима дели унапред припремљене радне листиће са текстом задатка).

1) Зајам од 300000 динара отплаћује се 8 година једнаким годишњим ануитетима. Каматна стопа је 8%(pa)d и годишње капиталисање. Одредити ануитет и пету отплату.

$$(a = K \cdot V_8^8 = 3000000 \cdot 0{,}174014 = 52204 din$$

$$a = b_1 \cdot I_8^{8-1+1} \qquad b_1 = \frac{52204}{0{,}174014} = 28204$$

$$b_5 = b_1 \cdot I_8^4 = 28204 \cdot 1{,}360488 = 38371)$$

2) Зајам од 50000 динара отплаћује се 8 година једнаким полугодишњим ануитетима уз стопу 6%(pa)d и полугодишње капиталисање. Направити амортизациони план за последњу годину амортизације зајма.

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Зајмови који се отплаћују једнаким отплатама.
Тип часа: обрада новог градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Увођење појма зајма који има једнаке отплате
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: развијање способности за посматрање, подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток часа

Уводни део часа: 5 мин

Контрола домаћег задатка.

Овакав модел зајма где су отплате исте, а ануитети различити примењује се када корисник зајма процени, очекујући ефекте пословања да му такав модел одговара.

Главни део часа: 35 мин

ЗАЈМОВИ КОЈИ СЕ АМОРТИЗУЈУ ЈЕДНАКИМ ОТПЛАТАМА:

$$b = \frac{K}{n} \qquad a_c = b + i_c$$

Задаци

1) Зајам од 100000 динара амортизује се за 4 године годишњим отплатама уз стопу 15%(pa)d и годишње капиталисање. Направити амортизациони план.

$$b = \frac{K}{n} = 25000 din \qquad i_c = \frac{K_c \cdot p}{100}$$

n	K	i	a
1	100000	15000	40000
2	75000	11250	36250
3	50000	7500	32500
4	25000	3750	28750

2) Зајам од 48000 динара амортизује се 5 година годишњим отплатама уз стопу 4%(pa)d и годишње капиталисање. Колики је четврти интерес? Колики је пети ануитет?

$$b = \frac{K}{n} = 9600 din$$

$$K_4 = K - 3b = 48000 - 3 \cdot 9600 = 19200 din \qquad i_4 = \frac{19200 \cdot 4}{100} = 768 din$$

$$K_5 = K - 4b = 48000 - 4 \cdot 9600 = 9600 din \qquad i_5 = \frac{9600 \cdot 4}{100} = 384 din$$

$$a_5 = b + i_5 = 9984 din$$

3) Зајам од 100000 динара амортизује се за 5. месеци месечним отплатама које сукцесивно расту за по 2000 динара. Интерес се рачуна једном годишње по стопи 2%(ps)d. Направити амортизациони план.

$$K = \frac{5}{2} \cdot (2b_1 + 4 \cdot 2000) \qquad \text{сума аритметичког низа}$$

$$100000 \cdot \frac{2}{5} - 8000 = 2b_1$$

$$b_1 = 16000$$

n	K	i	b	a
1	100000,00	2000,00	16000,00	18000,00
2	84000,00	1680,00	18000,00	19680,00
3	66000,00	1320,00	20000,00	21320,00
4	46000,00	920,00	22000,00	22920,00
5	24000,00	480,00	24000,00	24480,00
		6400,00	**100000,00**	**106400,00**

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1) Зајам од 400000 динара отплаћује се 5 година једнаким годишњим отплатама уз стопу 6%(pa)d и годишње капиталисање. Направити амортизациони план.

($b = 800000$

Број периода	Дук K	Интерес	Ануитет
1	4000000	240000	1040000
2	3200000	192000	992000
3	2400000	144000	944000
4	1600000	96000	896000
5	800000	48000	848000
		720000	4720000

)

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Зајмови који се отплаћују једнаким ануитетима који су чешћи од обрачуна камате.
Тип часа: обрада новог градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Увођење појма зајма који има ануитете који су чешћи од обрачуна камате
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: Подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток часа

Уводни део часа: 5 мин

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин

ЗАЈМОВИ КОЈИ СЕ АМОРТИЗУЈУ ЈЕДНАКИМ АНУИТЕТИМА КОЈИ СУ ЧЕШЋИ ОД ОБРАЧУНА КАМАТЕ:

$$a' = a \cdot \frac{200}{200m + (m-1)p}$$

m- број ануитета у обрачунском периоду

Задаци

1) Зајам од 800000 динара отплаћује се 20 година једнаким месечним ануитетима при годишњем капиталисању уз 14%(pa)d. Одредити месечни ануитет.

m=12 $\qquad a = 800000 \cdot V_{14}^{20} = 120788{,}80 din$

$$a' = 120788{,}80 \cdot \frac{200}{200 \cdot 12 + 11 \cdot 14} = 9458{,}79 din.$$

2) Зајам се отплаћује 10 година једнаким полугодишњим ануитетима од 5000 динара при годишњем капиталисању уз 6%(pa)d. Израчунати укупно плаћену камату у току амортизације зајма.

$n = 20 \qquad a' = 5000 \qquad m = 2$

$$a = a' \cdot \frac{200m + (m-1)p}{200} = 5000 \cdot \frac{400+6}{200} = 10150 din$$

$$K = a \cdot IV_6^{10} = 74704{,}88 din$$
$$\sum i = n \cdot a - K = 20 \cdot 5000 - 74704{,}88 = 25295{,}12 din$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: Поновити појам обвезнице. Група од три ученика добија задатак да на почетку следећег часа подсети остале ученике шта су обвезнице, када и зашто се користе?

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Амортизација зајмова подељених на обвезнице
Тип часа: обрада новог градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Увођење појма зајма који је подељен на обвезнице
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: Подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, обвезница

Ток часа

Уводни део часа: 10 мин.

Инвестирање у нова постројења и опрему захтева новац – често велике суме новца. Снажнија предузећа понекад могу уштедети из сопствених средстава довољно да покрију трошкове инвестиције, али најчешће то није случај. Фирмама тада преостају два начина за прибављање недостајућих средстава: позајмљивање готовине или продаја додатних емисија редовних акција. Ако је предузећима новац потребан само за кратко време (обртна средства), она тај новац могу добити од пословних банака (уз не баш повољне услове). Насупрот томе, уколико предузећа улазе у дугорочне инвестиције, она могу издавати обвезнице, као посебан облик дугорочних зајмова. Купцима својих обвезница предузећа обећавају исплату серије фиксних камата, а затим, истеком рока доспећа и отплату главнице. Међутим, савремени односи инвестирања тако су конципирани да се извршење привредних подухвата већег обима не може замислити без учешћа државе, односно њених организација и специјализованих финансијских институција. Због тога, јавни сектор је у највећем броју држава најприсутнији на тржишту обвезница. Значајна улога јавног сектора као емитента обвезница последица је правила које важи у већини земаља Европске Уније према коме зајмови државе треба да буду управљени углавном на изворе дугорочних средстава, а по могућству на тржишту обвезница.

Главни део часа: 30 мин.

Ако су зајмови велики, па се као давалац зајма појављује више правних и физичких лица, онда корисник дели зајам на мање износе. Сваки такав износ зајма је покривен обвезницом. Обвезнице се издају у заокруженим износима. Обвезнице су разврстане по серијама, а серије по бројевима. Камата се обрачунава и плаћа годишње декурзивно. Обвезнице се могу исплаћивати по номиналној вредности, односно мањој или већој вредности од номиналне.

ЗАЈАМ КОЈИ СЕ АМОРТИЗУЈЕ ЈЕДНАКИМ АНУИТЕТИМА, А ОБВЕЗНИЦЕ СЕ ИСПЛАЋУЈУ ПО НОМИНАЛНОЈ ВРЕДНОСТИ.

m = укупан број обвезница, $\alpha =$ номинална вредност обвезница $K = \alpha \cdot m$

$\frac{a}{\alpha}$ = ануитет у комадима обвезница $\frac{a}{\alpha} = m \cdot V_p^n$

$x_1, x_2, ...x_n$ теоријски добијени бројеви амортизованих обвезница

$x_1', x_2', ...x_n'$ бројеви стварно амортизованих обвезница

$$b_1 = K \cdot \left(V_p^n - \frac{p}{100} \right) \qquad x_1 = m \cdot \left(V_p^n - \frac{p}{100} \right) \qquad x_1 = \frac{a}{\alpha} - m \cdot \frac{p}{100}$$

$$x_c = x_1 \cdot I_p^{c-1} \qquad x_c = x_{c-1} \cdot I_p^1$$

$$O_k = x_1 \cdot \left(1 + III_p^{k-1}\right) \qquad R_{n-k} = m - O_k = \frac{a}{\alpha} IV_p^{n-k}$$

1) Зајам од 500000 динара подељен на обвезнице по 1000 динара треба амортизовати у току пет година једнаким годишњим ануитетима. Камата се обрачунава и исплаћује годишње по 12%d. Извучене обвезнице плаћају се по номинали. Направити амортизациони план.

K=500000 $\alpha = 1000$ n=5 p=12%(pa)d m=500

$\frac{a}{\alpha} = 500 \cdot V_{12}^5 = 138{,}7$ $\qquad x_1 = \frac{a}{\alpha} - m \cdot \frac{p}{100} = 138{,}7 - 500 \cdot 0{,}12 = 78{,}7$

Теоријски		стварно
$x_1 = 78{,}70$		$x_1' = 78$
$x_2 = x_1 \cdot I_{12}^1 = 88{,}15$	$x_2 = 88{,}15 + 0{,}70 = 88{,}85$	$x_2' = 88$
$x_3 = x_1 \cdot I_{12}^2 = 98{,}73$	$x_3 = 98{,}73 + 0{,}85 = 99{,}58$	$x_3' = 99$
$x_4 = x_1 \cdot I_{12}^3 = 110{,}57$	$x_4 = 110{,}57 + 0{,}58 = 111{,}15$	$x_4' = 111$

$x_5 = x_1 \cdot I_{12}^4 = 123{,}85$ $\quad$ $x_5 = 123{,}85 + 0{,}15 = 124$ $\quad$ $x_5' = 124$

n	обвезнице		интерес	отплата	стварни ануитет
	у течају	амортизоване			
1	500	78	60000	78000	138000
2	422	88	50640	88000	138640
3	334	99	40080	99000	139080
4	235	111	28200	111000	139200
5	124	124	14880	124000	138880
		500	193800	500000	693800

отплата = број амортизованих обвезница •100

стварни ануитет = $i+b$

$$i_1 = \frac{500 \cdot 1000 \cdot 12}{100} = 60000 \qquad i_2 = \frac{422 \cdot 1000 \cdot 12}{100} = 50640 \quad \ldots\ldots\ldots$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1) Зајам од 900000 динара подељен је на 900 обвезница. Отплаћује се четири године једнаким годишњим ануитетме уз 15% годишњег интереса и годишње капиталисање. Одредити

а) број амортизованих обвезница на крају прве године
б) број амортизованих обвезница на крају четврте године
в) укупан број амортизованих обвезница за прве три године
г) остатак неамортизованих обвезница на почетку четврте године

Решење: а) 180 б)275 в) 625 г) 275

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Амортизација зајмова подељених на обвезнице
Тип часа: утврђивање градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Утврђивање појма зајма који је подељен на обвезнице
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: Подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, обвезница

Ток часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка
Понављање појма обвезнице

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1) Зајам од 80000 динара подељен је на 800 обвезница по 100 динара. Отплаћује се четири године једнаким годишњим ануитетме уз 5% годишњег интереса и годишње капиталисање. Направити амортизациони план.

K=80000 $\alpha = 100$ n=4 p=5%(pa)d m=800

$$\frac{a}{\alpha} = 800 \cdot V_5^4 = 225{,}61 \qquad x_1 = \frac{a}{\alpha} - m \cdot \frac{p}{100} = 225{,}61 - 800 \cdot 0{,}05 = 185{,}61$$

Теоријски | стварно

$x_1 = 185{,}61$ | $x_1' = 185$

$x_2 = x_1 \cdot I_5^1 = 194{,}89$ | $x_2 = 194{,}89 + 0{,}61 = 195.50$ | $x_2' = 195$

$x_3 = x_1 \cdot I_5^2 = 204{,}64$ | $x_3 = 204{,}64 + 0{,}50 = 205{,}14$ | $x_3' = 205$

$x_4 = x_1 \cdot I_5^3 = 214{,}86$ | $x_4 = 214{,}86 + 0{,}14 = 215$ | $x_4' = 215$

n	обвезнице		интерес	отплата	стварни ануитет
	у течају	амортизоване			
1	800	185	4000	18500	22500
2	615	195	3075	19500	22575
3	420	205	2100	20500	22600
4	215	215	1075	21500	22575
		800	10250	80000	90250

2) Зајам од 200000 динара подељен је на 500 обвезница. Отплаћује се пет година једнаким годишњим ануитетме уз 15% годишњег интереса и годишње капиталисање. Направити амортизациони план.

K=20000 $\alpha = 400$ n=5 p=5%(pa)d m=500

$\frac{a}{\alpha} = 500 \cdot V_{15}^5 = 149{,}16$ $x_1 = \frac{a}{\alpha} - m \cdot \frac{p}{100} = 149{,}16 - 500 \cdot 0{,}15 = 74{,}16$

Теоријски | стварно

$x_1 = 74{,}16$ | $x_1' = 74$

$x_2 = x_1 \cdot I_{15}^1 = 85{,}28$ | $x_2 = 85{,}28 + 0{,}16 = 85.44$ | $x_2' = 85$

$x_3 = x_1 \cdot I_{15}^2 = 98{,}08$ | $x_3 = 98{,}08 + 0{,}44 = 98{,}52$ | $x_3' = 98$

$x_4 = x_1 \cdot I_{15}^3 = 112{,}79$ | $x_4 = 112{,}79 + 0{,}52 = 113{,}31$ | $x_4' = 113$

$x_5 = x_1 \cdot I_{15}^4 = 129{,}69$ | $x_5 = 129{,}69 + 0{,}31 = 130$ | $x_5' = 130$

n	обвезнице		интерес	отплата	стварни ануитет
	у течају	амортизоване			
1	500	74	30000	29600	59600
2	426	85	25560	34000	59560
3	341	98	20460	39200	59660
4	243	113	14580	45200	59780
5	130	130	7800	52000	59800
		500	98400	200000	298400

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1) Зајам од 50000 динара подељен је на 500 обвезница. Отплаћује се четири године једнаким годишњим ануитетме уз 26% годишњег интереса и годишње капиталисање. Одредити број амортизованих обвезница на крају прве, друге, треће, четврте године.

Решење: $x_1' = 85$ $x_2' = 108$ $x_3' = 135$ $x_4' = 172$

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Конверзија зајма.
Тип часа: обрада новог градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Научити ученике да амортизују зајам код кога је дошло до промене услова отплаћивања
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: Подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток часа

Уводни део часа: 5 мин.

Увод у тему и мотивациони разговор.

Конверзија зајма је промена неких од услова амортизације зајма (каматна стопа, рок отплате, начин отплате) до које може доћи за време отплате зајма. У тренутку промене услова отплаћивања зајма треба израчунати остатак дуга. Тај остатак дуга представља нови зајам који се даље отплаћује уз нове услове.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1) Зајам од 150000 динара амортизује се за 20 година једнаким годишњим ануитетима уз 18%(pa)d и годишње капиталисање. После тринаестог плаћеног ануитета интересна стопа је смањена на 16%(pa)d уз годишње капиталисање, а време амортизације продужено је за још 4 године. Израчунати нови ануитет.

$a = K \cdot V_{18}^{20} = 28023$ $\qquad K_1 = R_{n-13} = a \cdot IV_{18}^{20-13} = 106810{,}44$

$a_1 = K_1 \cdot V_{16}^{11} = 21240{,}4$

2) Зајам од 80000 динара треба да се отплати за 12 година једнаким полугодишњим ануитетима уз полугодишње капиталисање. Интересна стопа је 16%(pa)d. Два месеца по исплати десетог ануитета странке су се договориле да се интересна стопа смањи за 1%, а да корисник зајма исплати остатак дуга у наредних 9 година такође полугодишњим ануитетима. Израчунати нови ануитет.

$a = K \cdot V_8^{24} = 7598{,}24$ $\qquad K_1 = R_{n-10} = a \cdot IV_8^{24-10} = 62641{,}69$

$$K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot m}{12 \cdot 100}\right) = K_1 \cdot \left(1 + \frac{16 \cdot 2}{1200}\right) = 64312{,}14$$

$a_1 = K_2 \cdot V_{7,5}^{18} = 6626{,}01$

3) Зајам од 800000 динара исплаћује се 20 година једнаким полугодишњим ануитетима уз 16%(pa)d и полугодишње капитакисање. После 12 година, на тражење корисника зајма, каматна стопа је смањена на 14%(pa)d, а ануитет је смањен за 17188,13 динара. Колико ће се пута платити нови, смањени ануитет, да би се остатак дуга исплатио? Колико износи ануитетни остатак?

$a = K \cdot V_8^{40} = 67088{,}13$ $\qquad a_1 = 50000$

$K_1 = R_{n-24} = a \cdot IV_8^{40-24} = 593821{,}8$

$a_1 = K_1 \cdot V_7^n$ односно $500000 = 593821{,}8 \cdot V_7^n$

$V_7^n = 0{,}08420034$ $\qquad 26 < n < 27$

што значи да ће се 26 пута уплатити по 50000 динара, а крајем 27-ог полугодишта

$a_{27} = \left(K_1 - a_1 \cdot IV_7^{26}\right) \cdot I_7^{27} = 15738{,}9$

4) Зајам се амортизује 9 година једнаким полугодишњим ануитетима уз 6%(pa)d и полугодишње капиталисање. Осма отплата износи 4000 динара. Двадесет и два дана по исплати десетог ануитета каматна стопа је смањена за 2%, а зајам се плаћа у наредних 6 година једнаким годишњим ануитетима уз годишње капиталисање. Одредити нови ануитет.

$a = b_8 \cdot I_3^{18-8+1}$ $\qquad K_1 = R_{18-10} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 22}{360 \cdot 100}\right)$ $\qquad a_1 = K_1 \cdot V_4^6 = 6519{,}39$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1) Зајам од 80000 динара амортизује се за 12 година једнаким годишњим ануитетима уз 6%(pa)d и годишње капиталисање. После пет година странке су се договориле да се отплаћивање продужи за две године. Одредити ануитет после конверзије зајма. (3876,19).

2) Кредит за куповину стана Милоша Петровића код Комерцијалне банке, у износу од 45000 евра се амортизује 20 година једнаким полугодишњим ануитетима. уз интерес 5%(pa)d и полугодишње капиталисање. После 25 плаћених ануитета, Комерцијална банка мења услове кредита и смањује интересну стопу за 1%(pa)d и продужава рок отплате кредита за две године. Израчунати нови ануитет.

($a = 45000 \cdot V_{2,5}^{40} = 1729,63$ $\quad K_1 = R_{40-25} = 1729,63 \cdot IV_{2,5}^{40-25} = 21415,20$

$a_1 = 21415,20 \cdot V_2^{15+4} = 1365,90$)

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Конверзија зајма.
Тип часа: утврђивање градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Увежбати амортизацију зајма код кога је дошло до промене услова отплаћивања
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: Подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток часа

Уводни део часа: 5 мин

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1) Зајам се амортизује 9 година једнаким полугодишњим ануитетима уз 6%(pa)d и полугодишње капиталисање. Осма отплата износи 4000 динара. Двадесет и два дана по исплати десетог ануитета каматна стопа је смањена за 2%, а зајам се плаћа у наредних 6 година једнаким годишњим ануитетима уз годишње капиталисање. Одредити нови ануитет.

$$a = b_8 \cdot I_3^{18-8+1} \qquad K_1 = R_{18-10} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 22}{360 \cdot 100}\right) \qquad a_1 = K_1 \cdot V_4^6 = 6519{,}39$$

2) Зајам од 30000 амортизује се 10 година једнаким годишњим ануитетима уз 7%(pa)d и годишње капиталисање. Прве три године дужник је редовно плаћао зајам, а следеће 4 године није плаћао ништа. Тада су се странке договориле да исплати зајам у предвиђеном року уз 6%(pa)d. Одредити нови ануитет.

$$K_1 = R_{10-3} \cdot I_7^4 \qquad a_1 = K_1 \cdot V_6^3 = 11289{,}84$$

3) Дужник отплаћује два зајма. Први од 40000 на десет година уз 6%(pa)d уз једнаке годишње ануитете и годишње капиталисање. Други од 50000 на 14 година једнаким полугодишњин ануитетима уз 6%(pa)d и полугодишње капиталисање. После 6 година оба зајма се спајају у један, па нови зајам треба да се амортизује у наредних 10 година једнаким годишњим ануитетима уз 5%(pa)d и годишње капиталисање. Одредити нови ануитет. (6722,04)

4) Кредит Косте Марковића у износу од 80000 евра треба да се отплати за 12 година једнаким полугодишњим ануитетима уз полугодишње капиталисање и 16%(pa)d. Два месеца након исплате десетог ануитета, странке су се договориле да се интересна стопа смањи за 1%, а да корисник зајма исплати остатак дуга у наредних 9 година такође полугодишњим ануитетима. Направити амортизациони план за отплату наведеног кредита.

Ануитет у складу са условима кредита $a = 80000 \cdot V_8^{24} = 7598{,}24$

Након исплате десетог ануитета дошло је до промене услова отплаћивања зајма, па је нови зајам остатак дуга после плаћених 10 ануитета

$$K_1 = R_{24-10} = 7598{,}24 \cdot IV_8^{24-10} = 62641{,}69$$

Урадимо корекцију за два месеца

$$K_1' = K_1 \cdot \left(1 + \frac{16 \cdot 2}{1200}\right) = 64312{,}14$$

Нови ануитет од једанаестог периода је

$$a_1 = 64312{,}14 \cdot V_{7,5}^{18} = 6626{,}01$$

Користећи Excel урадимо план отплате наведеног кредита:

n	K	i	a	b
1	80000	6400	7598.24	1198.24
2	78801.76	6304.141	7598.24	1294.099
3	77507.66	6200.613	7598.24	1397.627
4	76110.03	6088.803	7598.24	1509.437
5	74600.6	5968.048	7598.24	1630.192
6	72970.4	5837.632	7598.24	1760.608
7	71209.8	5696.784	7598.24	1901.456
8	69308.34	5544.667	7598.24	2053.573
9	67254.77	5380.381	7598.24	2217.859
10	65036.91	5202.953	7598.24	2395.287
11	64312.14	4823.411	6626.01	1802.6
12	62509.54	4688.216	6626.01	1937.794
13	60571.75	4542.881	6626.01	2083.129
14	58488.62	4386.646	6626.01	2239.364
15	56249.25	4218.694	6626.01	2407.316
16	53841.94	4038.145	6626.01	2587.865
17	51254.07	3844.055	6626.01	2781.955
18	48472.12	3635.409	6626.01	2990.601
19	45481.52	3411.114	6626.01	3214.896
20	42266.62	3169.997	6626.01	3456.013
21	38810.61	2910.796	6626.01	3715.214
22	35095.39	2632.154	6626.01	3993.856
23	31101.54	2332.615	6626.01	4293.395
24	26808.14	2010.611	6626.01	4615.399
25	22192.74	1664.456	6626.01	4961.554
26	17231.19	1292.339	6626.01	5333.671
27	11897.52	892.3139	6626.01	5733.696
28	**6163.822**	462.2866	6626.01	**6163.723**

Завршни део часа: 5мин

Домаћи задатак:

1) Предузеће има код исте банке две обавезе:
-зајам од 1000000 динара који треба да се амортизује за 15 година једнаким полугодишњим ануитетима уз интерес 5% и полугодишње капиталисање
- други зајам од 800000 динара који треба да се амортизује за 12 година једнаким годишњим ануитетима са 6 %(pa)d. и годишње капиталисање.
- после пет година током којих су ануитети плаћани редовно обе обавезе се спајају у једну. овако формиран нови зајам ће се амортизовати 16 година једнаким полугодишњим ануитетима уз 4%(pa)d и полугодишње капиталисање. Одредити ануитет новог зајма.

Решење

први зајам: $a_1 = 1000000 \cdot V_{2.5}^{30} = 47777{,}64$

$K_1 = R_{30-10} = 47777{,}64 \cdot IV_{2,5}^{20} = 744813{,}36$

други зајам: $a_2 = 800000 \cdot V_6^{12} = 95421{,}62$

$K_2 = R_{12-5} = 95421{,}62 \cdot IV_6^{7} = 532679{,}8385$

Укупан дуг после 5 година: $K = K_1 + K_2 = 1277493{,}2$

$a = 1277493{,}2 \cdot V_2^{32} = 54434{,}75$

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Комбиновани задаци
Тип часа: утврђивање градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Увежбати амортизацију зајма
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развијање културне, радне, естетске способности, развијање аналитичног приступа у решавању проблема, код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: Подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток првог часа

Уводни део часа: 5 мин

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин

Задаци

1) Зајам се амортизује 20 година једнаким годишњим ануитетима. Однос осме и друге отплате зајма износи 1,586874. Остатак дуга на почетку петнаесте године износи 120000 динара. Одредити ануитет и укупно плаћени интерес за свих 20 година. Капиталисање је годишње.

$$\frac{b_8}{b_2} = 1{,}586874 \qquad R_{20-14} = 120000$$

$$\frac{b_2 \cdot I_p^6}{b_2} = 1{,}586874$$

$$I_p^6 = 1{,}586874 \qquad 1 + \frac{p}{100} = 1{,}08$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 1{,}586874 \qquad p = 8\%$$

$$R_{20-14} = 120000$$

$$a = R_6 \cdot V_8^6 = 25957{,}8 \qquad K = a \cdot IV_8^{20} = 254857{,}49$$

$$\sum_{k=1}^{20} i_k = 20a - K = 264298{,}51$$

2) Претпоставимо да сте позајмили 4000 долара на две године уз 12%(pa)d. Ако сте на крају прве године вратили 2000 долара и на крају друге 2000 долара, колико износи остатак вашег дуга?

$$(4000 \cdot 1{,}12 - 2000) \cdot 1{,}12 - 2000 = 777{,}6$$

3) Претпоставимо да сте власник скоро пресушеног извора нафте. На њему можете зарадити у току прве године 1200000 долара и у току друге године 720000 долара, а онда ће извор пресушити. Међутим, можете купити пумпу помоћу које ћете исцрпити извор за годину дана и зарадити 2040000 долара. Ако је годишња каматна стопа 20%, која је највиша цена по којој има смисла купити пумпу?

$$12000000 \cdot II_{20}^1 + 720000 \cdot II_{20}^2 = 1500000 \qquad 2040000 \cdot II_{20}^1 = 1700000$$

Највиша цена је 200000

4) Краткорочни кредит на износ 500000 динара амортизује се током једне године са полугодишњим декурзивним ануитетима са годишњом стопом 21%. Ако се одговарајућа стопа рачуна комформном методом, колико износи камата за први ануитет у динарима?

$$p_k = \left(\sqrt{1 + \frac{21}{100}} - 1\right) \cdot 100 = 10\% \qquad i_1 = \frac{500000 \cdot 10}{100} = 50000$$

5) Зајам треба да се отплати за 6 месеци једнаким месечним отплатама од по 30 000 динара уз 19,5618171% камате годишње и годишње капиталисање. Направити амортизациони план

$$p_k = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1 + \frac{19{,}5618171}{100}} - 1\right) = 1{,}5\%$$

n	*K*	*i*	*b*	*a*
1	180000	2700	30000	32700
2	150000	2250	30000	32250
3	120000	1800	30000	31800
4	90000	1350	30000	31350
5	60000	900	30000	30900
6	30000	450	30000	30450

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1) Зајам од 8000 евра треба да се отплати за 4 године једнаким месечним ануитетима уз месечно капиталисање и 12%(pa)d. Дужник је редовно плаћао зајам једну годину, након тога две године и два месеца није плаћао ништа. Странке су се договориле да се зајам врати у наредне две године, а да се каматна стопа смањи за 2%. Одреди нови ануитет.

Ток другог часа

Уводни део часа: 5 мин

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин

1) Зајам од 250 000 динара треба отплатити за 3 године једнаким полугодишњим отплатама уз 12% камате годишње и полугодишње капиталисање. Израдити план отплаћивања зајма.

2) Зајам од 76000 динара се амортизује једнаким тромесечним ануитетима од 7297,32 динара уз стопу 9%(pa)d и тромесечно капиталисање. Одредити време отплате дуга. (Решење: три године)

3) Зајам од 91000 динара се амортизује једнаким месечним ануитетима од 1759,28 динара уз стопу 6%(pa)d и месечно капиталисање. Одредити број периода отплаћивања. (Решење 60)

4) Колико треба отпалћивати зајам од 375000 динара једнаким годишњим ануитетима који износе петнаестину зајма ако је каматна стопа 2.912%(pa)d и капиталисање годишње? (Решење 20 година)

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1) Зајам од 540000 динара треба да се отплати за 13 година једнаким месечним ануитетима уз месечно капиталисање и 18%(pa)d. Дужник је редовно плаћао зајам две године, након тога две године и 43 дана није плаћао ништа.

Странке су се договориле да се зајам врати у наредних 10 година, а да се каматна стопа повећа за 3%. Одреди нови ануитет.

Редни број часа: _____

Наставна јединица: Припрема за контролни задатак
Тип часа: утврђивање градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунари-уколико има могућности, калкулатори, финансијске таблице
Циљ часа: Увежбати амортизацију зајма
Образовни задатак: Научити ученике да израчунавају зајмове, примене научено у пракси и наставе проширивање знања из области економских наука
Васпитни задатак: развиајње свести о сопственом знању, самокритичности
Функционални задатак: Подстицање способности за повезивање теоријских и практичних знања
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА1.4.6. Примењује основна математичка знања за доношење финансијских закључака и одлука
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Кључни појмови: зајам, камата, ануитет, отплата

Ток часа

Уводни део часа: 5 мин

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1) Зајам од 50000 динара амортизује се две године једнаким полугодишњим ануитетима уз 10%(pa)d камате и полугодишње капиталисање. Направити амортизациони план.

2) Пети интерес зајма који се отплаћује једнаким годишњим ануитетима 12.година уз 8% (pa)d и годишње капиталисање износи 9000 динара. Одредити остатак дуга у десетој години.

3) Зајам се отплаћује 6. година једнаким кварталним ануитетима уз 16%(pa)d интереса и квартално капиталисање. Ануитет износи 3000. динара. Одредити отплаћени део дуга на почетку 20.периода отплаћивања и одредити укупно плаћени интерес.

4) Зајам од 100000 динара подељен је на 1000 обвезница. Отплаћује се за 5. година једнаким годишњим ануитетима уз 6%(pa)d и годишње капиталисање. Направити амортизациони план.

Завршни део часа: 5 мин.

Договор о предстојећем контролном задатку

1) Функције

Важнији појмови и чињенице о функцијама једне променљиве (дефинисаност, нуле, парност, монотоност, периодичност). Сложена функција (Појам и важнији примери). преглед важнијих елементарних функција. Полиноми (нуле полинома, Безуов став, примене). Непрекидност функције (геометријски смисао). Гранична вредност функције, неке карактеристичне граничне вредности, број е.

Редни број часа _____

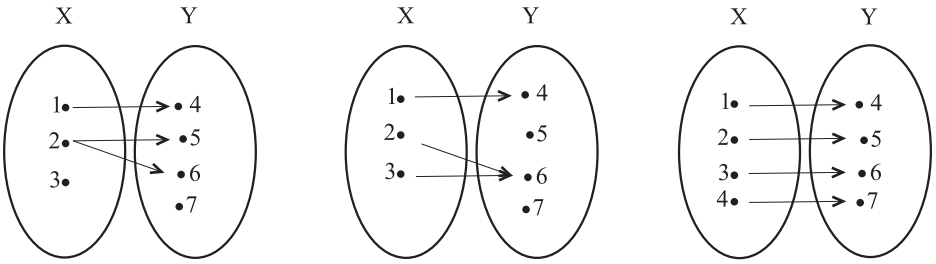
Наставна јединица: Појам функције
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања из различитих разреда у јединствену целину.
Образовни задатак: Усвајање и правилно дефинисање функције и основних појмова везаних за функције, разумевање трансформација графика функције**.**
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: функција, график

Уводни део часа: 10 мин.

Дефиниција: Релација $f \subseteq X \times Y$, тј. пресликавање $f : X \to Y$ је **функција** уколико важи $(\forall x \in X)(\exists_1 y \in Y) \;\; y = f(x)$.

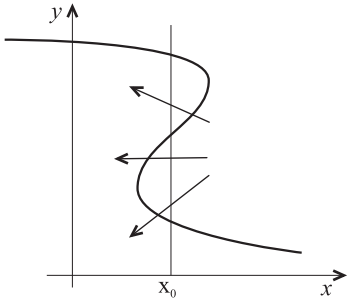
Подразумеваћемо $X, Y \subseteq \boldsymbol{R}$, тј. да су дате функције **реалне** функције.

Пример 1. Уочимо следећа пресликавања скупа $f : X \to Y$:



Прво пресликавање не представља, а следећа два представљају функцију.

Објаснити зашто крива приказана на графику није функција.

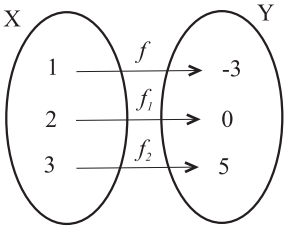


Скуп X се зове **домен** или **област дефинисаности** функције, а скуп Y **кодомен** или **скуп вредности** функције.
$x \in X$ је **независно променљива** или **аргумент** функције, а $y \in Y$ **зависно променљива** или **вредност функције**.

Главни део часа: 30 мин.

Начини представљања функција:

1. Веновим дијаграмом



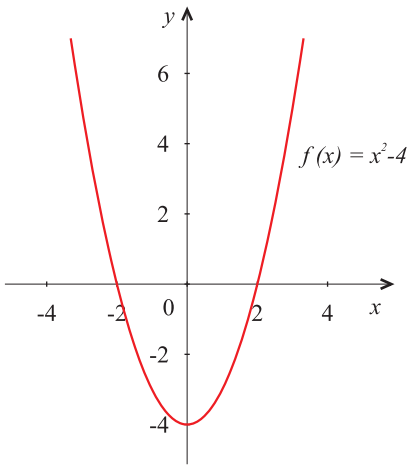
2. Таблично:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-3	0	5	11	21	32	45

3. Скупом уређених парова: $f = \{(1,-3),(2,0),(3,6),(4,11),(5,21),(6,32),(7,45)\}$

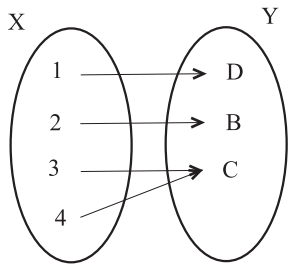
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -3 & 0 & 5 & 11 & 21 & 32 & 45 \end{pmatrix}$$

4. Формулом: $f(x) = x^2 - 4$
5. Графички:

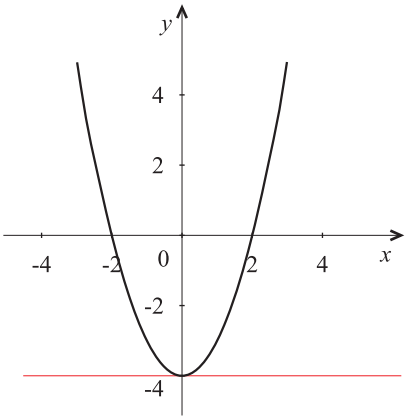


Две функције су **једнаке** уколико су им једнаки домени и кодомени.
Дефиниција: Ако је $f_1 : X_1 \to Y_1; f_2 : X_2 \to Y_2$ и уколико важи

$X_1 \subseteq X_2 \quad Y_1 \subseteq Y_2 \quad (\forall x \in X_1) \quad f_1(x) = f_2(x)$ кажемо да је функција f_1 **рестрикција** (сужење) функције f_2.
Особине функције:
Пресликавање је **сурјективно** или "**на**", ако важи $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x))$.

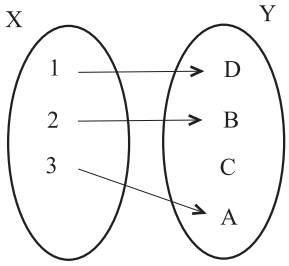


Нпр. функција дата Веновим дијаграмом је сурјективна.



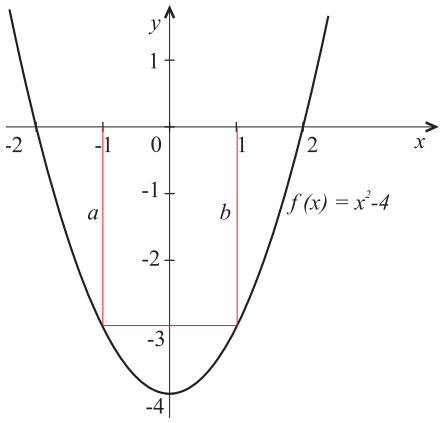
Функција $f(x) = x^2 - 4$ дата графиком није сурјективна, али њена рестрикција $f_1 : R \to [-4, +\infty)$ јесте.
Функција $f(x) = x^2 - 4$ није сурјективна на скупу реалних бројева зато што нпр. не постоји реално x за које је $f(x) = -5$.

Пресликавање је **инјективно** или "**1-1**" ако важи
$(\forall x_1, x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

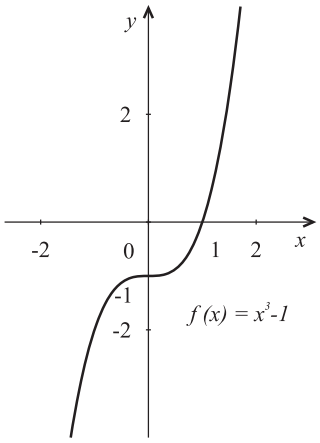


Нпр. функција дата Веновим дијаграмом је инјективна.

Функција дата графиком (доле лево) није инјективна, али њена рестрикција $f_2 : [0,+\infty) \to R$ јесте.



Функција $f(x) = x^2 - 4$ није инјективна зато што је нпр. $1 \neq -1$, али $f(1) = f(-1)$



Дефиниција: Функција која је и инјективна и сурјективна је **бијективна** (обострано једнозначно пресликавање).

Функција дата графиком је бијективна.

Пример 2. Нека је $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ и $f : A \to B$. Испитај да ли функција *f* има особине "*1-1*" и "*на*" ако је

а) $f = \{(1,c),(2,a),(3,b),(4,c)\}$

б) $f = \{(1,b),(2,c),(3,d),(4,a)\}$

в) $f = \{(1,a),(2,c),(3,d),(4,c)\}$

Завршни део часа: 5 мин.

Нацртати у GeoGebri функције, прецртати у свеску и анализирати њихове особине са графика: $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $f(x) = x^3 - x$

Редни број часа _____

Наставна јединица: Особине функције
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Тип часа: понављање и утврђивање
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Понављање и утврђивање појма бијекције.
Образовни задатак: Усвајање и правилно дефинисање функције и основних појмова везаних за функције, разумевање трансформација графика функције**.**
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: функција, график

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Поновити појам инјективног, сурјективног и бијективног пресликавања.

Главни део часа: 30 мин.

Задаци

1. Испитај да ли су следећа пресликавања бијекције: (*нацртати и закључити уз помоћ цртежа*)

а) $f(x) = 2x - 3$ $\quad f : R \to R$
б) $f(x) = x^2$ $\quad f : R \to R$
в) $f(x) = x^3 - 2$ $\quad f : R \to R$
г) $f(x) = x^4$ $\quad f : R^+ \to R$
д) $f(x) = x^4 + 1$ $\quad f : R \to R^+$

2. Испитај да ли су следећа пресликавања бијекције: (*нацртати и закључити уз помоћ цртежа*)

а) $f(x) = x^2 + 6x + 9$ $\quad f : [-3,+\infty) \to R^+$

б) $f(x) = x^2 + 6x + 12$ $\quad f : [-3,+\infty) \to [3,+\infty)$

в) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ $\quad f : [-1,+\infty) \to [2,+\infty)$

г) $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ $\quad f : (-\infty,4] \to (-\infty,4]$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: Испитај да ли су следећа пресликавања бијекције: (*нацртати и закључити уз помоћ цртежа*)

а) $f(x) = x^2 + 2$ $\quad f : R \to R$

б) $f(x) = x^3 - 5$ $\quad f : R \to R$

в) $f(x) = x^4 - 1$ $\quad f : R^+ \to R^+$

Редни број часа _____

Наставна јединица: Област дефинисаности функције
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка
Циљ часа: Научити област дефинисаности функције.
Образовни задатак: Научити услове дефинисаности различитих класа функција**.**
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: функција, график

Уводни део часа: 5-10 мин.

Контрола домаћег задатка.
Област дефинисаности представља скуп свих реалних вредности аргумента x за које су дефинисане операције које се налазе у формули за функцију.

Главни део часа: 30-35 мин.

Целе рационалне функције, односно полиномне функције облика $f(x)=2x^2-8x+5$ дефинисане су на скупу реалних бројева. Писаћемо да је домен, односно област дефинисаности ових функција $D=(-\infty,\infty)$.

Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане функције, тада је функција:

1. $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дефинисана за $g(x)\neq 0$,
2. $\sqrt[2n]{f(x)}$ дефинисана за $f(x)\geq 0$,
3. $\ln(f(x))$, $\log(f(x))$ дефинисана за $f(x)>0$,
4. $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ дефинисана за $-1\leq f(x)\leq 1$.

Задаци

Одреди област дефинисаности (домен) за следеће функције:

1. $f(x)=x^2+2$ [Полиномна функција, закључујемо $D=(-\infty,\infty)$]
2. $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ [$D=(-\infty,\infty)$]
3. $f(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$ [$D=(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$]
4. $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^2-6x+8}$ [$D=(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$]
5. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ [$D=(-\infty,\infty)$]
6. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$ [$D=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$]
7. $f(x)=\sqrt{3x+2}$ [$D=\left[-\dfrac{2}{3},\infty\right)$]
8. $f(x)=\ln(x+2)$ [$D=(-2,\infty)$]

Додатни задаци

9. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ [$D=[-3,3]$]
10. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ [$D=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$]
11. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [$D=[-1,1]$]
12. $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x-2}}$ [$D=(2,\infty)$]
13. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$ [D = [-3,3)]
14. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1}$ [$D=(3,\infty)$]
15. $f(x)=\ln(x^2-4)$ [$D=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$]

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 20-26

Редни број часа _____

Наставна јединица: Област дефинисаности функције
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка
Циљ часа: Утврдити област дефинисаности функције.
Образовни задатак: Научити услове дефинисаности различитих класа функција**.**
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: функција, график

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Понављање области дефинисаности различитих класа функција.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

Одреди област дефинисаности за следеће функције:

1. $f(x)=\ln\left(x^2-4x\right)$
2. $f(x)=2^{\frac{x}{x-2}}$
3. $f(x)=4^{\sqrt{2x+3}}$
4. $f(x)=\sqrt{\ln(x+3)}$
5. $y=\dfrac{1}{e^x-1}$
6. $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$
7. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x}$

8. $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$
9. $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$
10. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3}$

Додатни задаци

11. $f(x)=(x+3)e^{\frac{1}{x+3}}$
12. $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$
13. $f(x)=x\ln x$
14. $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$
15. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
16. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$
17. $y=\dfrac{\ln x}{2\ln x-1}$
18. $y=\ln^2 x-4\ln x+4$
19. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln^2(x-1)}$
20. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}}+\ln(x-5)$
21. $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\ln(x^2-x)$

Завршни део часа: 5мин

Домаћи задатак из збирке: 27-29

Редни број часа _____

Наставна јединица: Парност функције
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: упознавање са појмом парност функције.
Образовни задатак: научити на који начин се проверава и уочава парност функције
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: парност функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

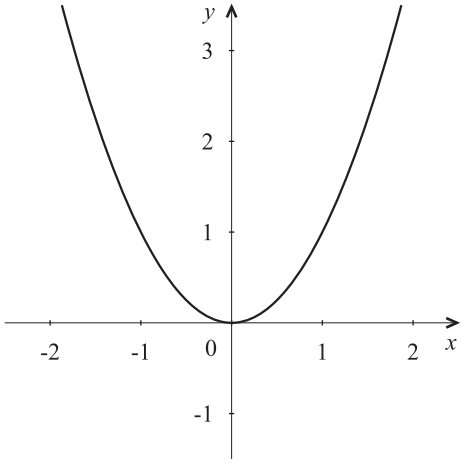
Нацртати неколико функција симетричних у односу на осу x, неколико функција симетричних у односу на координатни почетак и у сарадњи са ученицима извести закључак о појму парности функције.

Главни део часа: 30 мин.

Дефиниција: За функцију $y = f(x)$ кажемо да је **парна** ако је испуњено $f(-x) = f(x)$, за сваки елемент x из домена те функције.

Домен парне функције је симетричан у односу на нулу. График парне функције је симетричан у односу на y-осу.

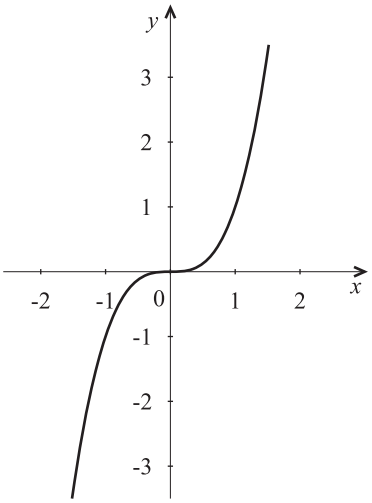
Пример 1: $f(x) = x^2$



$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Дефиниција: За функцију $y = f(x)$ кажемо да је **непарна** ако је испуњено $f(-x) = -f(x)$, за сваки елемент *x* из домена те функције.
График непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак

Пример 2: $f(x) = x^3$



$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Задаци

Испитај парност следећих функција:

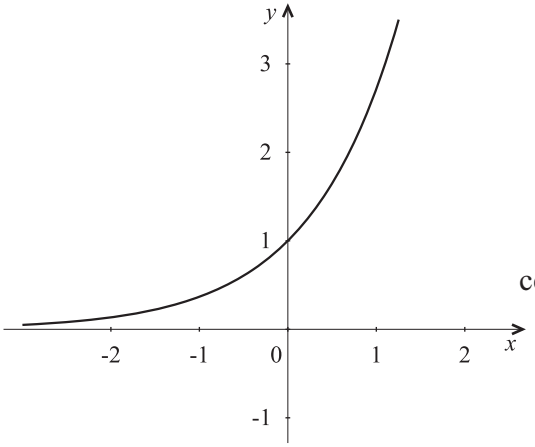
1. $f(x) = e^x$

Решење:

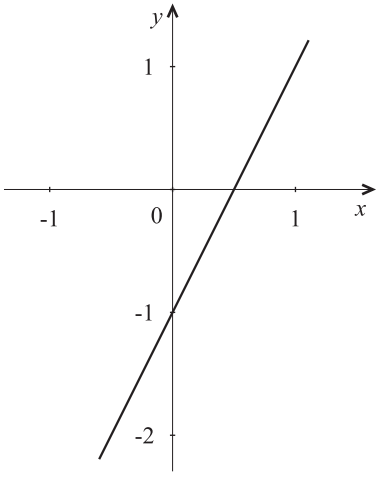
$D = R$

$f(-x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

Функција није ни парна ни непарна што се види и на графику.

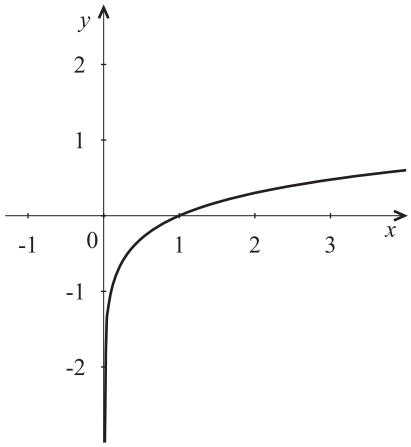


2. $f(x) = 2x - 1$



Решење:
$D = R$
$f(-x) = -2x - 1$
Функција није ни парна ни непарна што се види и на графику.

3. $f(x) = \log x$



Решење:
$D = (0, +\infty)$
Функција није ни парна ни непарна
Домен функције није симетричан у односу на нулу

4. $f(x) = x^3 - 4x$

Решење: $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x)$, непарна функција

5. $f(x) = x^2 + 8$

Решење: $f(-x) = (-x)^2 + 8 = x^2 + 8 = f(x)$, парна функција

6. $f(x) = |x|$

Решење: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, парна функција

7. $f(x) = x \cdot |x|$

Решење: $f(-x) = -x \cdot |-x| = -x \cdot |x| = -f(x)$, непарна функција

8. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}|x|$

Решење: $f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{2}|-x| = x^2 + \frac{1}{2}|x| = f(x)$, парна функција

9. $f(x)=\cos x$

Решење: $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$, парна функција

Додатни задаци

10. $f(x)=\sin x$

Решење: $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$, непарна функција

11. $f(x)=x^2-1-3\cos x$

Решење: $f(-x)=(-x)^2-1-3\cos(-x)=x^2-1-3\cos x=f(x)$, парна функција

12. $f(x)=x^3+\sin x$

Решење: $f(-x)=(-x)^3+\sin(-x)=-x^3-\sin x=-(x^3+\sin x)=-f(x)$,непарна функција

13. $f(x)=\log(x-1)$

Решење: $D=(1,+\infty)$

Функција није ни парна ни непарна

Домен функције није симетричан у односу на нулу

Завршни део часа: 5мин

Домаћи задатак из збирке: 37,38.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Парност функције
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: утврђивање појма парности функције.
Образовни задатак: утврдити на који начин се проверава и уочава парност функције**.**
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: парност функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Понављање парности и непарности функције, као и геометријског смисла истих.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

Испитај парност следећих функција:

1. $f(x) = x + tgx$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + 1$
3. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos 3x}{x^2}$
4. $f(x) = x + \dfrac{1}{2}x^3 - \arcsin x$
5. $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x - 1}$
6. $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

Додатни задаци

7. $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$
8. $f(x)=\dfrac{4^x+4^{-x}}{8}$
9. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
10. $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$
11. $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$
12. $f(x)=\dfrac{(a^x+1)^2}{a^x}$
13. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Завршни део часа: 5мин

Домаћи задатак из збирке: 39

Редни број часа _____

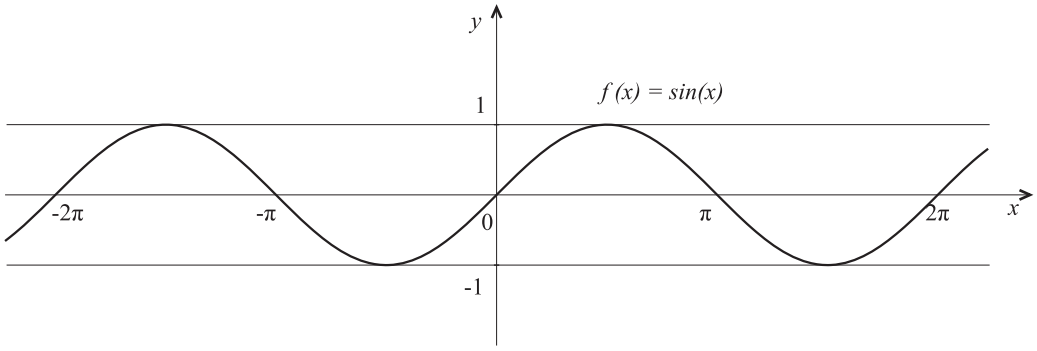
Наставна јединица: Периодичност функције
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: упознавање са појмом периодичности функције.
Образовни задатак: научити на који начин се проверава и уочава периодичност функције
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.4. Решава проблеме користећи основна својства функција (област дефинисаности, периодичност, парност, монотоност, ...)
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: периодичност функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Поновити појам периодичности и основне периоде тригонометријских функција.

Илустровати графички појам периодичности:



Главни део часа: 35 мин.

За функцију $y = f(x)$ кажемо да је **периодична** ако постоји број $T \neq 0$ такав да је $f(x+T) = f(x)$, за сваки елемент x из домена те функције. Број T зовемо **периодом** функције.

Основни период функција *sinx* и *cosx* је 2π, а функција *tgx* и *ctgx* π.

Задаци

Испитај периодичност следећих функција:

1. $y = 3\cos 4x$ $\left[T = \frac{2\pi}{4}\right]$

2. $y = tg6x$ $\left[T = \frac{\pi}{6}\right]$

3. $y = \sin 2\pi x$ $\left[T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\right]$

4. $y = \cos(2x+3)$ $\left[T = \frac{2\pi}{2}\right]$

5. $y = \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{3}$ $\left[T_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}}, \quad T = NZS(T_1, T_2) = 12\pi\right]$

6. $y = \cos^2 x$ $\left[y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad T = \frac{2\pi}{2}\right]$

7. $y = \sin x \cdot \cos x$ $\left[y = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad T = \frac{2\pi}{2}\right]$

8. $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\left[T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{2}, \quad T_3 = \frac{2\pi}{3}, \quad T = NZS(T_1, T_2, T_3) = 2\pi\right]$$

Додатни задатак

9. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$y = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\left(\sin x \cos x\right)^2$$

$$y = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2$$

Решење: $$y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}\frac{1 - \cos 4x}{2}$$

$$y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x, \quad T = \frac{2\pi}{4}$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 41.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Нуле и знак функције
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: научити одређивање нула и знака реалних функција.
Образовни задатак: усвајање појма нула и знака функције и њихових дефиниција
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: нуле, знак функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Нацртати линеарну функцију $f(x)=2x-1$ и одредити њену нулу и знак.

Главни део часа: 35 мин.

Нуле функције су оне вредности независно променљиве x за које је $f(x)=0$. Нуле функције су тачке у којима график функције сече Ox.

Функција је позитивна на интервалу (a,b) ако важи $(\forall x\in(a,b))f(x)>0$

Функција је негативна на интервалу (a,b) ако важи $(\forall x\in(a,b))f(x)<0$

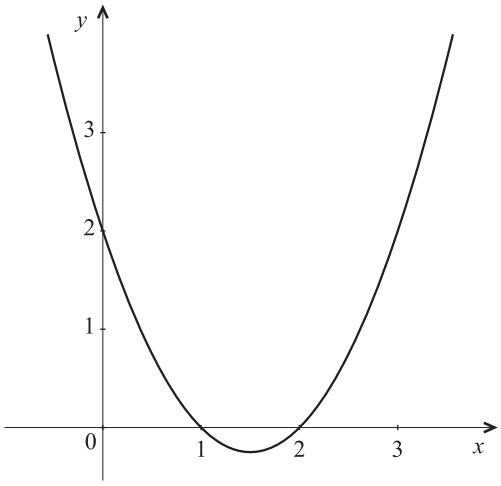
Задаци

Одредити домен, наћи нуле и испитати знак следећих функција:

1. $f(x)=x^2-3x+2$

Решење:

D=R
Функција има нуле у x=1 и x=2
Знак: y<0 за $x \in (1,2)$
y>0 за $x \in (-\infty,1)$ *и* $x \in (2,+\infty)$



2. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$

Решење:
Прво ћемо одредити област у којој је функција дефинисана $D=(-\infty,\infty)$
Нула функције: $\dfrac{2x+1}{x^2+1}=0$, дакле 2x+1=0, $x=-\dfrac{1}{2}$

Знак:

2x+1	- - -	+ + +
x^2+1	+ + +	+ + +
$f(x)$	+ + +	+ + +

$-\infty \qquad -\dfrac{1}{2} \qquad +\infty$

$f(x)>0$ *за* $x \in \left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

$f(x)<0$ *за* $x \in \left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

3. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

Решење:
Прво ћемо одредити област у којој је функција дефинисана $D=(-\infty,\infty)$
Нула функције: $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}=0$, дакле $x^2-4=0$, $x_1=-2 \quad x_2=2$
Знак:

x^2-4	+ + +	- - -	+ + +
x^2+4	+ + +	+ + +	+ + +
$f(x)$	+ + +	- - -	+ + +

$-\infty \qquad -2 \qquad 2 \qquad +\infty$

$f(x) > 0$ *за* $x \in (-\infty, -2)$ *и* $x \in (2, +\infty)$
$f(x) < 0$ *за* $x \in (-2, 2)$

4. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 8}$

Решење:
Прво ћемо одредити област у којој је функција дефинисана $D = (-\infty - 2) \cup (-2, \infty)$

Нула функције: $\dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 8} = 0$, дакле $x^3 - 8 = 0$, $\quad x = 2$

Знак:

$x^3 - 8$	- - -	- - -	+ + +
$x^3 + 8$	- - -	+ + +	+ + +
$f(x)$	+ + +	- - -	+ + +

$-\infty \qquad -2 \qquad 2 \qquad +\infty$

$f(x) > 0$ *за* $x \in (-\infty, -2)$ *и* $x \in (2, +\infty)$
$f(x) < 0$ *за* $x \in (-2, 2)$

5. $f(x) = e^{x^2 - 1}$

Решење:
D=R
Функција нема нуле, односно не сече осу *x* и позитивна је за све реалне *x*

6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$

Решење:
Прво ћемо одредити област у којој је функција дефинисана $D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

Нула функције: $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = 0$, дакле $x^2 - 6x + 8 = 0$, $\quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4$

Знак:

$x^2 - 6x + 8$	+ + +	- - -	+ + +
$x - 2$	- - -	+ + +	+ + +
$f(x)$	- - -	- - -	+ + +

$-\infty \qquad 2 \qquad 4 \qquad +\infty$

$f(x) > 0$ *за* $x \in (4, +\infty)$
$f(x) < 0$ *за* $x \in (-\infty, 2)$ *и* $x \in (2, 4)$

Додатни задаци

7. $f(x)=\dfrac{5x-4}{x^2-6x+5}$

Решење:
Област у којој је функција дефинисана $D=(-\infty,1)\cup(1,5)\cup(5,\infty)$
Нула функције: $\dfrac{5x-4}{x^2-6x+5}=0$, дакле $5x-4=0$, $x=\dfrac{4}{5}$
Знак:

$5x-4$	- - -	+ + +	+ + +	+ + +
x^2-6x+5	+ + +	+ + +	- - -	+ + +
$f(x)$	- - -	+ + +	- - -	+ + +

$-\infty$ 4/5 1 5 $+\infty$

$f(x)>0$ *за* $x\in(4/5,1)$ *и* $x\in(5,+\infty)$
$f(x)<0$ *за* $x\in(-\infty,4/5)$ *и* $x\in(1,5)$

8. $f(x)=\dfrac{x^2+4x-21}{x^2+3x-4}$

Решење:
Област у којој је функција дефинисана $D=(-\infty,-4)\cup(-4,1)\cup(1,\infty)$
Нула функције: $\dfrac{x^2+4x-21}{x^2+3x-4}=0$, дакле $x^2+4x-21=0$, $x_1=-7$ $x_2=3$
Знак:

$x^2+4x-21$	+ + +	- - -	- - -	- - -	+ + +
x^2+3x-4	+ + +	+ + +	- - -	+ + +	+ + +
$f(x)$	+ + +	- - -	+ + +	- - -	+ + +

$-\infty$ -7 -4 1 3 $+\infty$

$f(x)>0$ *за* $x\in(-\infty,-7)$ $x\in(-4,1)$ *и* $x\in(3,+\infty)$
$f(x)<0$ *за* $x\in(-7,-4)$ *и* $x\in(1,3)$

9. $f(x)=(x^2-1)e^x$

Решење:
Прво ћемо одредити област у којој је функција дефинисана $D=(-\infty,\infty)$

Нула функције: $(x^2-1)e^x=0$, дакле $x^2-1=0$, $x_1=-1$ $x_2=1$
Знак:

x^2-1	+ + +	- - -	+ + +
e^x	+ + +	+ + +	+ + +
$f(x)$	+ + +	- - -	+ + +

$-\infty$ -1 1 $+\infty$

$f(x)>0$ *за* $x\in(-\infty,-1)$ *и* $x\in(1,+\infty)$
$f(x)<0$ *за* $x\in(-1,1)$

10. $f(x)=(x^2-4x+3)e^x$

Решење:
Прво ћемо одредити област у којој је функција дефинисана $D=(-\infty,\infty)$
Нула функције: $(x^2-4x+3)e^x=0$, дакле $x^2-4x+3=0$, $x_1=1$ $x_2=3$
Знак:

x^2-4x+3	+ + +	- - -	+ + +
e^x	+ + +	+ + +	+ + +
$f(x)$	+ + +	- - -	+ + +

$-\infty$ 1 3 $+\infty$

$f(x)>0$ *за* $x\in(-\infty,-1)$ *и* $x\in(3,+\infty)$
$f(x)<0$ *за* $x\in(1,3)$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 45. а-д

Редни број часа _____

Наставна јединица: Нуле и знак функције
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка
Циљ часа: утврдити одређивање знака и нула реалних функција.
Образовни задатак: утврђивање појма нула и знака функције и њихових дефиниција
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: нуле, знак функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

Одреди домен,нуле и знак следећих функција:

1. $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ [$D=R$]
2. $f(x)=\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^2+2}$ [$D=R$]
3. $f(x)=\ln(x-1)$ [$D=(1,+\infty)$]
4. $f(x)=\ln(x^2-5x+7)$
5. $f(x)=x\cdot\ln x$ [$D=(0,+\infty)$]
6. $f(x)=(x-2)\ln^2(x-2)$ [$D=(2,+\infty)$]
7. $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

Додатни задаци

8. $f(x)=\ln^2 x-6\ln x+9$ **[** $D=(0,+\infty)$ **]**
9. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-7x+12}}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 45. ђ,е,к

Редни број часа _____

Наставна јединица: Сложена функција.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка
Циљ часа: поновити сложене функције
Образовни задатак: понављање и проширивање појма сложене функције
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: сложена функција

Уводни део часа: 5 мин.

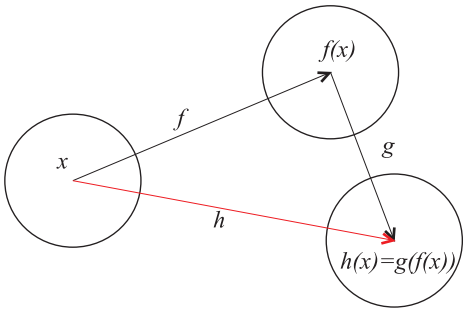
Контрола домаћег задатка.
Нека су дате функције $f(x)=2x+3$, $g(x)=x^2+1$. Ако узмемо $f(-1)=1$ и $g(1)=2$ можемо закључити $g(f(-1))=2$

$$-1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 2$$

Главни део часа: 35 мин.

Дефиниција. Нека су дате функције $f: A \to B$ и $g: B \to C$ и нека је $h: A \to C$ таква да је $h(x)=g(f(x)), \forall x \in A$. Функцију $h(x)$ називамо **сложеном** функцијом или **суперпозицијом** функција $f(x)$ и $g(x)$.

$$\boxed{h(x)=(g \circ f)(x)=g(f(x)), \forall x \in A}$$



Задаци

1. Нека је $f(x)=2x+3$ и $g(x)=4x-1$. Одреди $g(f(x))$.
   Решење: $g(f(x))=g(2x+3)=4(2x+3)-1=8x+11$.
2. Нека је $f(x)=(x+1)^2$ и $g(x)=\ln x$. Одреди $g(f(x))$, $f(g(x))$.
3. Нека је $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\ln x$. Одреди $g(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(f(x)))$.
   Решење: $g(f(f(x)))=g\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)=g\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)=g\left(\sqrt[4]{x}\right)=\ln\sqrt[4]{x}$
4. Ако је $f(x+1)=x^2-3x+2$ наћи $f(x)$.
   Решење:
   Уведимо смену $t=x+1$, имамо $f(t)=(t-2)^2-3(t-1)+2$, тј. $f(x)=x^2-7x+9$.
5. Ако је $f(x-1)=x^2+1$ наћи $f(x+1)$.
6. Ако је $f(x-2)=x^3-2x-1$ наћи $f(1)$. $[f(1)=20]$
7. Ако је $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=(x+1)^2$ и $x\neq-1$, наћи $f(3)$. $[f(3)=\dfrac{1}{4}]$
8. Ако је $f\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=x-2$ и $x\neq-2$, наћи $f(x)$.

Завршни део часа: 5 мин.

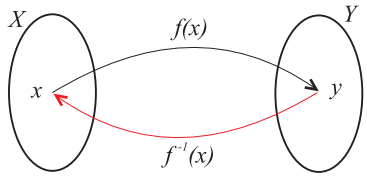
Домаћи задатак из збирке: 53,57.

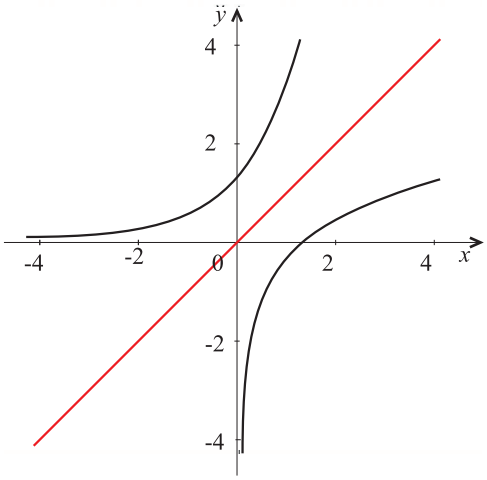
Редни број часа _____

Наставна јединица: Инверзна функција.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: поновити појам инверзне функције
Образовни задатак: понављање и проширивање појма инверзне функције
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.3. Анализира графички представљене функције (одређује нуле, знак, интервале монотоности, екстремне вредности и тумачи их у реалном контексту).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: инверзна функција

Уводни део часа: 10 мин.

Контрола домаћег задатка. Понављање појма инверзне функције.





Ако је функција $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq R$ бијекција онда постоји **инверзна** функција $f^{-1}: Y \to X$ тако да важи:

$$\boxed{f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(f(x)) = x}$$

Графици међусобно инверзних функција су симетрични у односу на праву $y=x$.

Главни део часа: 30 мин.

Задаци

Одреди инверзне функције датих функција:

1. $f(x)=3x-2$

   Решење:

   Уведимо смену $y=3x-2$. Изразимо $x=\dfrac{y+2}{3}$.

   $f^{-1}(3x-2)=x$ односно $f^{-1}(y)=\dfrac{y+2}{3}$ закључујемо $f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$

2. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ $f:R/\{-1\}\to R/\{1\}$

   Решење:

   Уведимо смену $y=\dfrac{x}{x+1}$. Изразимо $x=\dfrac{y}{1-y}$.

   $f^{-1}(\dfrac{x}{x+1})=x$ односно $f^{-1}(y)=\dfrac{y}{1-y}$ закључујемо $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-x}$

3. $f(x)=x^2$, $f:R\to R$ није бијекција на скупу R, па нема инверзну функцију.

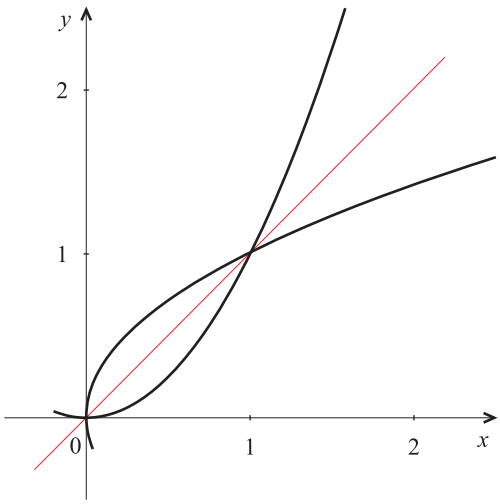
4. $f(x)=x^2$, $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$

   Решење:

   Уведимо смену $y=x^2$. Изразимо $x=\sqrt{y}$.

   $f^{-1}(x^2)=x$ односно $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$

   закључујемо $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$



5. $f(x)=\ln(x-1)$, $x>1$

   Решење:

   Уведимо смену $y=\ln(x-1)$. Изразимо $x=1+e^y$.

   $f^{-1}(\ln(x-1))=x$ односно $f^{-1}(y)=1+e^y$ закључујемо $f^{-1}(x)=1+e^x$

6. $f(x)=e^x-1 \qquad f:R\to(-1,+\infty)$

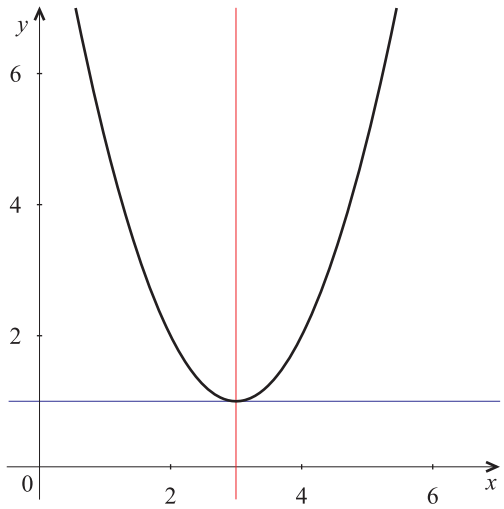
Решење:
Уведимо смену $y=e^x-1$. Изразимо $x=\ln(y+1)$.
$f^{-1}(e^x-1)=x$ односно $f^{-1}(y)=\ln(y+1)$ закључујемо $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$

7. $f(x)=x^2-4x+5 \qquad f:[2,\infty)\to[1,\infty)$

Решење:
Наведену функцију ћемо написати у облику: $f(x)=(x-2)^2+1$
Уведимо смену $y=(x-2)^2+1$. Изразимо $x=2+\sqrt{y-1}$
$f^{-1}(x^2-4x+5)=x$ односно $f^{-1}(y)=2+\sqrt{y-1}$ закључујемо $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-1}$

8. $f(x)=x^2-6x+10$ нема инверзну, јер није бијекција.

Решење:



Нађимо рестрикцију $f(x)=x^2-6x+10$ за које би била бијекција. Независно променљива x треба да буде из скупа $(-\infty,3)$ или из скупа $(3,\infty)$ или неког поскупа датих скупова. Вредност функције може бити скуп $[1,\infty)$ или неки његов подскуп.

За функцију $f(x)=x^2-6x+10$, $f:(-\infty,3)\to[1,\infty)$ наћи ћемо инверзну функцију.
Наведену функцију ћемо написати у облику: $f(x)=(x-3)^2+1$
Уведимо смену $y=(x-3)^2+1$. Изразимо $x=3-\sqrt{y-1}$
$f^{-1}(x^2-6x+10)=x$ односно $f^{-1}(y)=3-\sqrt{y-1}$ закључујемо
$f^{-1}(x)=3-\sqrt{x-1}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 58.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Полиноми. Безуов став.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка
Циљ часа: поновити примену Безуове теореме за растављање полинома на чиниоце
Образовни задатак: понављање и утврђивање Безуове теореме
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.1.4. Трансформише једноставне алгебарске изразе.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: Безуова теорема, нуле функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћих задатака и решавање примера који нису били јасни.
Безуова теорема: Остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $(x-a)$ је полином $P(a)$, при чему је a константа.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1. Подели полиноме: $(2x^3+5x^2+7x+4):(x+1)$

Решење:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3+5x^2+7x+4):(x+1)=2x^2-3x+4 \\
\underline{-2x^3-2x^2} \\
\quad 3x^2+7x+4 \\
\underline{-3x^2-3x} \\
\quad 4x+4 \\
\underline{-4x-4} \\
\quad 0
\end{array}
$$

2. Користећи Безуову теорему раставити на чиниоце полином:
   $P(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$

Решење: $P(-1) = 0 \quad (x^3 + 9x^2 + 23x + 15) : (x+1) = x^2 + 8x + 15$

$P(x) = (x+1)(x^2 + 8x + 15) = (x+1)(x+3)(x+5)$

3. Одреди нуле и знак следећих функција: а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

   б) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Решење: а) $f(1) = 0 \quad (x^3 - 3x^2 + 2) : (x-1) = x^2 - 2x - 2$

$f(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 2 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 - \sqrt{3} \quad x_3 = 1 + \sqrt{3}$

$x-1$	- - - - - - - - - -		+ + + + + + + + +	
$x^2 - 2x - 2$	+ + +	- - - - - - - - - - - - -		+ + +
$f(x)$	- - - -	+ + + + +	- - - - -	+ + +

$-\infty \qquad 1-\sqrt{3} \qquad 1 \qquad 1+\sqrt{3} \qquad \infty$

: б) $f(1) = 0 \quad (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6$

$f(x) = (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$

$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - x - 6 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2 \quad x_3 = 3$

$x-1$	- - - - - - - - - -		+ + + + + + + + +	
$x^2 - x - 6$	+ + +	- - - - - - - - - - - - -		+ + +
$f(x)$	- - - -	+ + + + +	- - - - -	+ + +

$-\infty \qquad -2 \qquad 1 \qquad 3 \qquad \infty$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: Одреди нуле и знак функције: $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 3$.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Гранична вредност функције
Тип часа: обрада, понављањеи утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: научити појам и технике за одређивање граничних вредности функција
Образовни задатак: научити одређивање граничних вредности функција
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.5. Разуме концепт непрекидности и израчунава једноставне граничне вредности **функција**
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: гранична вредност функције

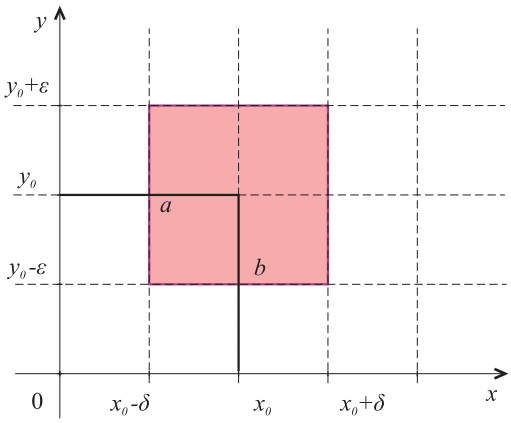
Ток 1. часа

Уводни део часа: 10 мин.

У трећем разреду смо дефинисали појам граничне вредности низа. Сада дефинишемо општији појам - појам **граничне вредности функције**. Поновити појам тачке нагомилавања са ученицима.

Дефиниција: За функцију $f(x)$, дефинисану у околини тачке x_0, осим можда у самој тачки x_0, кажемо да има граничну вредност y_0, $y_0 \in R$, у тачки x_0, ако за свако x из околине тачке x_0 и свако $\varepsilon > 0$ постоји позитиван број $\delta(\varepsilon)$, такав да је за $0 < |x - x_0| < \delta$ испуњена неједнакост $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Тада пишемо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.



Дакле, колико год да смањујемо број $\varepsilon > 0$, увек се може одредити $\delta(\varepsilon) > 0$, тако да график функције лежи у правоугаонику на слици.

Главни део часа: 30 мин.

Технике за израчунавање граничних вредности функције:

1. Директна замена

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x+1\right)=3$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x^2+2}=\dfrac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\left(3^x-1\right)=80$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+1\right)=2$

2. Скраћивање (канцелација)

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}=2$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-8x+7}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{(x-1)(x-7)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)(x-7)}=0$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^3-8x^2+15x}=\dfrac{2}{5}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}=3$

6) (Збирка: 66. ј)) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{|x|-4}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{-(x+4)}=8$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 66.

Ток 2. часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка
Понављање појма граничне вредности функције

Главни део часа: 35 мин.

3. Рационалисање

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)}=2$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1+x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{(1+x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=2$$

4) $$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{a-1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{a-1}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{a-1}\right)}{(x-a)}=4a\sqrt{a-1}$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{2x}=\frac{3}{2}$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Решење
(Користити смену $t=\sqrt[6]{x+1}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\frac{3}{2}$$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Решење
(Користити смену $t=\sqrt{x}$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-t}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}=3$$

Додатни задатак

8) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=-2$

Решење
(Користити смену $t=\sqrt[3]{x}$)

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to -2}\frac{\sqrt{1-t^3}-3}{2+t}=\lim_{t\to -2}\frac{\left(\sqrt{1-t^3}-3\right)\left(\sqrt{1-t^3}+3\right)}{(2+t)\left(\sqrt{1-t^3}+3\right)}=$$

$$\lim_{t\to -2}\frac{-t^3-8}{(2+t)\left(\sqrt{1-t^3}+3\right)}=\lim_{t\to -2}\frac{-(t+2)(t^2-2t+4)}{(2+t)\left(\sqrt{1-t^3}+3\right)}=-2$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 67) а-к.

Ток 3. часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка
Понављање појма граничне вредности функције

Главни део часа: 35 мин.

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{3x^4-4x^2+1}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{x-1}=\infty$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{4x}=\frac{3}{4}$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x}{x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=0$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{\frac{1}{x}}}{x^2\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)}=-1$$

5) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

6) $$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

Решење

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-10x}\right)$

Решење

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-10x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-10x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-10x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-10x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+|x|\sqrt{1-\frac{10}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{x}}\right)}=5$$

8) **Додатни задатак**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x-2}-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)}=1$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 69.

Ток 4. часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка
Понављање појма граничне вредности функције

Главни део часа: 35 мин.

4. **Израчунавање граничне вредности коришћењем граничне вредности:**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=4$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{1}{12}$

7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1}{4}$$

8) **Додатни задатак**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x-1)}{4x^2-1}+\frac{8x^3-1}{2x^2-x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}+\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{x(2x-1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{4x^2+2x+1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+4x+2+\frac{1}{x}\right)=\infty$$

Завршни део часа: 5 мин.

Разговор о задацима рађеним на часу.

Ток 5. часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка
Ојлеров број $e \approx 2{,}7$

Главни део часа: 35 мин.

5. **Одређивање граничне вредности коришћењем граничне вредности**:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

Задаци

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=e^{3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=e$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=e^{2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}=\infty$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^{2}}\right)^{x^{2}\frac{1}{x^{3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^{3}}}=1$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}x\frac{2}{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 70.

Ток 6. часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Поновити: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$

Главни део часа: 35 мин.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$

Решење

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}(x+2)\frac{-4}{2x+3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-4x-8}{2x+3}}=e^{-2}$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{3x^2}$

Решење

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{x^2-2}-1\right)^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-2}\right)^{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2}{2}}\right)^{\frac{x^2-2}{2}3x^2\frac{2}{x^2-2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6x^2}{x^2-2}}=e^{6}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

Решење

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(2+x)}\right)^{-(2+x)\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\frac{1}{-(2+x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}}=1$$

1) **Додатни задатак** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^x=e^2$

4. Одређивање граничне вредности коришћењем граничне вредности:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}=5$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

5. Одређивање граничне вредности коришћењем граничне вредности:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}=-2$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e\cdot\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}=e$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 74,76.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Непрекидност функције.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: научити појам и технике за испитивање непрекидности функција
Образовни задатак: научити технике за испитивање појма непрекидности
Васпитни задатак: развијање прецизности и систематичности код ученика
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.5. Разуме концепт непрекидности и израчунава једноставне граничне вредности функција
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: непрекидност функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Дефиниција: Нека $x_0 \in A \subset R$ и нека $f : A \to R$. За функцију f кажемо да је **непрекидна** у тачки x_0, ако је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ако функција f није непрекидна у тачки x_0 која припада њеном домену кажемо да је f **прекидна** у тачки x_0.

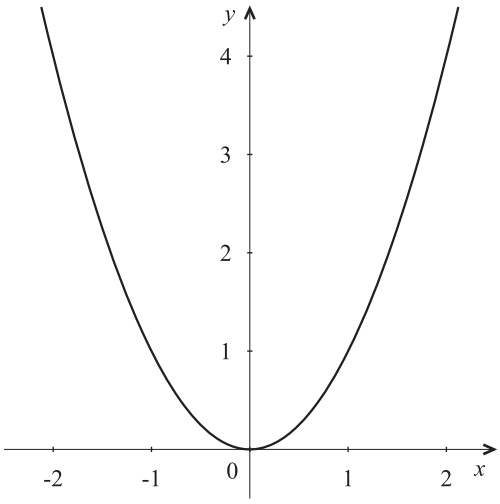
Дефиниција: За функцију $f : A \to R$ која је непрекидна за свако $x \in A$ кажемо да је непрекидна на А.

Главни део часа: 35 мин.

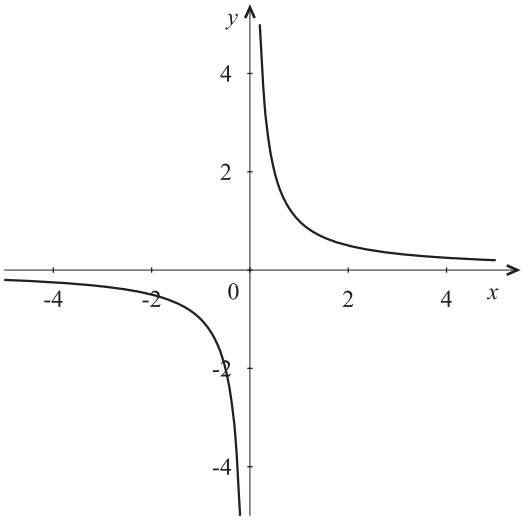
Услов $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ интуитивно значи да кад се оригинал x „приближава“ броју x_0 одговарајуће вредности слике $f(x)$ се приближавају броју $f(x_0)$. Ако то важи за сваку тачку $x_0 \in A$, онда ће график функције f бити на скупу А једна непрекидна линија, у смислу да се може нацртати у једном потезу оловке.

Примери:

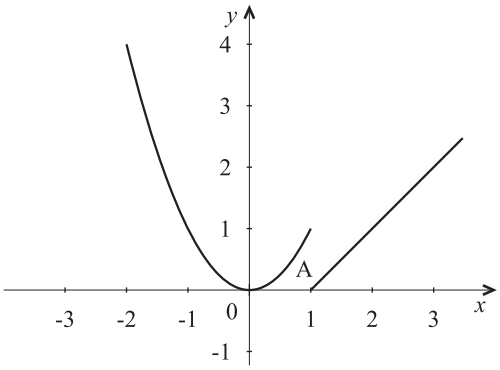
1. $y = x^2$



2. $y = \dfrac{1}{x}$



3. $y = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$



Задаци

Одреди вредност параметра a тако да функција буде непрекидна:

1. $f(x)=\begin{cases} x+a & x\le 0 \\ 3+2x-x^2 & x>0 \end{cases}$

Решење

$\lim\limits_{x\to 0+}\left(3+2x-x^2\right)=3$, $\qquad a=3$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & x\le 1 \\ a+2x & x>1 \end{cases}$

Решење

$x^2+4x=5$ за x=1 , $\lim\limits_{x\to 1+}\left(a+2x\right)=a+2=5$, $\qquad a=3$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+x+1} & x\le 1 \\ \dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+a & x>1 \end{cases}$

Решење

$\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$ за x=1

$\lim\limits_{x\to 1+}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-x+a\right)=a+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, $\qquad a=0$

4. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 1 \\ 3-ax^2 & x>1 \end{cases}$

Решење

$x+1=2$ за x=1

$\lim\limits_{x\to 1+}\left(3-ax^2\right)=3-a=2$, $\qquad a=1$

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$

Решење

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$, $a=\dfrac{1}{2}$

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{tg5x}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ $[\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}=5,\ a=5]$

Додатни задаци

7. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{2x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ $[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}=\dfrac{3}{2},\ a=\dfrac{3}{2}]$

8. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ a+5 & x=2 \end{cases}$ $[\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4,\ a+5=4\,\mathrm{g}]$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 78,81

2) Извод функције

Прираштај функције. Извод функције (проблем тангенте и брзине). Основне теореме о изводу (извод збира, производа, количника и сложене функције). Изводи елементарних функција.

Испитивање функција (уз примену извода); график функције. Општа шема испитивања и скицирања графика функције.

Примена извода у економији: функција тражње, цене и прихода, максимум прихода; функција укупних и просечних трошкова; функција добити; еластичност функција: еластичност функција тражње, прихода и трошкова.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Прираштај функције. Проблем тангенте и брзине. Дефиниција првог извода.
Тип часа: обрада новог градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања из различитих разреда у јединствену целину.
Образовни задатак: Усвајање и правилно дефинисање извода функције
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.4. У функцијама које су представљене графички или табеларно, анализира, примењује и приближно израчунава брзину промене помоћу прираштаја.
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: извод

Уводни део часа: 10 мин.

Увод у тему и мотивациони разговор: *Проблеми тангенте и брзине, као и проблеми екстрема подстакли су настанак појма извода. Појавом Декартове методе координата*

омогућено је да се криве представљају једначинама, што је био предуслов за аналитичко решавање проблема тангенте, односно за дефинисање појма извода. Проблем тангенте први је решио Лајбниц. У исто време Њутн је дефинисао извод као последицу истраживања феномена кретања. Симболика коју је увео Лајбниц била је једноставнија и опште је прихваћена, али заслуге за откривање диференцијалног рачуна припадају подједнако и Њутну и Лајбницу.

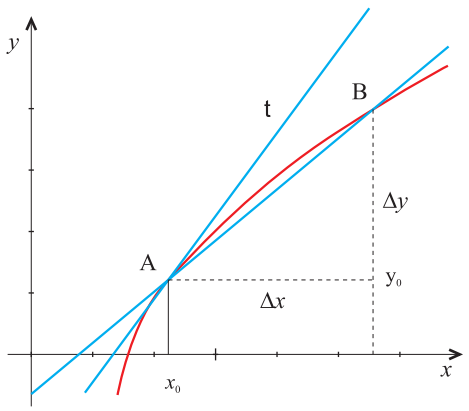
Дефиниција. Нека је $f(x)$ дефинисана у околини тачке x. Произвољну малу величину Δx називамо **прираштај аргумента** x. Када се независно променљива, аргумент, промени од x до $x+\Delta x$, тада се вредност функције промени од $f(x)$ до $f(x+\Delta x)$, тј. за величину $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, која се назива **прираштај функције.**

Уколико функција представља промену пута у функцији времена количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представља средњу брзину кретања за временски интервал Δx.

Главни део часа: 30 мин.

Дефиниција. Ако је $y = f(x)$ једначина кретања неке тачке, онда је брзина кретања у тренутку једнака

$$v(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Тангента криве

Количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представља коефицијент правца сечице криве AB. Уколико се тачка B по кривој $f(x)$ приближава тачки A у граничном случају сечица AB постаће тангента криве у тачки A. Количник $\boxed{k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$ је коефицијент правца дате тангенте.

Једначина тангенте у тачки $A(x_0, y_0)$ је:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

Дефиниција. Ако постоји гранична вредност $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$ тада кажемо да је $f'(x)$ **први извод функције** $f(x)$ у датој тачки x. Поступак налажења извода

назива се **диференцирање**. Ако је $f'(x)$ коначна вредност, тада кажемо да је функција диференцијабилна у датој тачки x.

Пример 1. Одреди извод функције $f(x)=x^2$ по дефиницији.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

Пример 2. Одреди извод функције $f(x)=C$ по дефиницији.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

Пример 3. Одреди извод функције $f(x)=\sin x$ по дефиницији.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos\Delta x+\cos x\cdot\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cdot 1+\cos x\cdot\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin\Delta x}{\Delta x}=\cos x$$

Пример 4. Одреди извод функције $f(x)=\ln x$ по дефиницији.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=\frac{1}{x}$$

Пример 5. Одреди извод функције $f(x)=e^x$ по дефиницији.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\cdot e^{\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=e^x$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: Одреди извод функција $f(x)=\cos x$, $f(x)=x^3$ по дефиницији.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Таблица извода елементарних функција.
Тип часа: обрада новог градива
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања из различитих разреда у јединствену целину.
Образовни задатак: Формирање таблице извода елементарних функција
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о значају примене раније стечених знања
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: таблица извода

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Наставник заједно са ученицима формира таблицу извода елементарних функција

$f(x)$	$f'(x)$	Домен
C	0	
x	1	
$x^n,\ n \in R$	nx^{n-1}	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$a^x,\ a > 0, a \neq 1$	$a^x \ln a$	$x \in R$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$

$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1; x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in Z$

Пример. Наћи први извод следећих функција применом таблице извода:

а) $y = \sin x$ б) $y = tgx$ в) $y = \cos x$ г) $y = x^5$ д) $y = \sqrt[3]{x}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: Направити личну таблицу извода

Редни број часа _____

Наставна јединица: Извод збира, разлике, производа и количника
Тип часа: обрада, понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка, хеуристичка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања из различитих разреда у јединствену целину, усвајање градива неопходног за наставак школовања
Образовни задатак: Усвајање основних правила диференцирања и њихова примена
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, а посебно у економији, разумевање економских законитости и појава у животном окружењу
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива, аналитичности и систематичности
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: правила диференцирања

Ток првог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Понављање таблице извода.

Означавање за извод које користимо је Лагранжово, а користи се и Лајбницово $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df}{dx}(x)$; $\frac{d}{dx}f(x)$

Главни део часа: 35 мин.

Основна правила диференцирања

Ако постоје $f'(x), g'(x)$ онда важи:

$\boxed{(C\cdot f(x))' = C\cdot(f(x))'}$, C је константа

$\boxed{(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)}$

$$\boxed{\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Задаци. Наћи први извод следећих функција:

1. $y = 25\cos x$ $\quad [y' = -25\sin x]$

2. $y = x^2 + 3x - 5$ $\quad [y' = 2x + 3]$

3. $y = e^x \cdot \ln x \ , \ x > 0$ $\quad \left[y' = \left(e^x\right)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right]$

4. $y = x^3 \cdot \sin x$ $\quad \left[y' = \left(x^3\right)' \cdot \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x\right]$

5. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1$ $\quad \left[y' = \frac{\left(x^2\right)'\left(x^2-1\right) - x^2\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x\left(x^2-1\right) - x^2 \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right]$

6. $y = \frac{\ln x}{\ln x - 1} \quad x > 0, \ x \neq e$ $\quad \left[y' = \frac{(\ln x)'(\ln x - 1) - \ln x(\ln x - 1)'}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-1}{x \cdot (\ln x - 1)^2}\right]$

7. $y = x^3 - 3x^2 - \frac{5}{x^4} \quad , \ x \neq 0$ $\quad \left[y' = 3x^2 - 6x + \frac{20}{x^5}\right]$

8. $y = 4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ $\quad \left[y' = \frac{8}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}\right]$

Додатни задаци:

9. $y = 2x\sqrt{x} \quad , \quad x > 0$ $\quad \left[y' = \left(2x^{\frac{3}{2}}\right)' = 3\sqrt{x}\right]$

10. $y = 6 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt{x}} \ , \ x > 0$ $\quad \left[y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{2x\sqrt{x}}\right]$

11. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ $\quad \left[y' = \frac{4x^2 - 2}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}\right]$

12. $y = x - \sin x \cdot \cos x$ $\quad [y' = 1 - \cos 2x]$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 125

Ток другог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. Наћи први извод следећих функција:

а) $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$ $\left[y'=\dfrac{-\sin x-2}{(1+2\sin x)^2}\right]$

б) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ $\left[y'=\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}\right]$

в) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ $\left[y'=\dfrac{-2\ln x}{x(1+\ln x)^2}\right]$

2. Ако је $f(x)=-x^3+9x^2+x-1$ одреди $f'(-1)$. $[f'(-1)=-20]$

3. Ако је $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-1$ одреди $f'(3)$. $[f'(3)=33]$

4. Ако је $f(x)=3\ln x-x^2$ одреди $f'(1)$ $[f'(1)=1]$

Додатни задаци

5. Ако је $f(x)=\dfrac{tgx}{1-tgx}$ одреди $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\left[f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\cdot\left(4+3\sqrt{3}\right)\right]$

6. Ако је $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$ одреди $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left[f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(2\sqrt{2}-3\right)\right]$

7. Израчунати $f'(0)+f'(-1)-f'(2)$ ако је $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$. $[f'(0)+f'(-1)-f'(2)=-1]$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 127,128

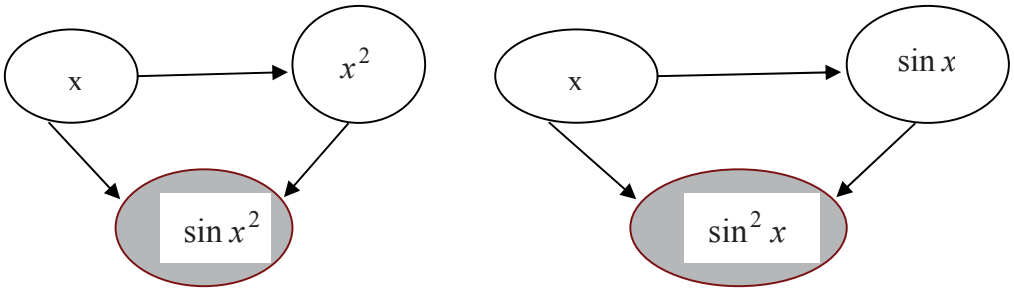
Редни број часа _____

Наставна јединица: Извод сложене функције
Тип часа: обрада, понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка, хеуристичка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања из различитих разреда у јединствену целину.
Образовни задатак: Научити ученике технику рачунања извода сложене функције
Васпитни задатак: Развијање код ученика прецизности и уредности приликом израде задатака
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива и систематичности
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: извод сложене функције

Ток првог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.
Објаснити разлику између елементарних и сложених функција. $y = \sin x^2$, $y = \sin^2 x$.



Главни део часа: 35 мин.

Ако је дата сложена функција $F(x)=f(g(x))$, где је функција $g(x)$ диференцијабилна у тачки x, а функција $f(u)$ диференцијабилна у тачки $u=g(x)$, онда је

$$\boxed{F'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Задаци: Одреди извод следећих функција:

1. $y=\sin 4x$ $\qquad \left[y'=\cos 4x\cdot(4x)'=4\cos 4x\right]$

2. $y=(1-x)^{10}$ $\qquad \left[y'=10(1-x)^9(1-x)'=-10(1-x)\right]^9$

3. $y=e^{2x}$ $\qquad \left[y'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}\right]$

4. $y=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3+3}\right)^4$

Решење: $y'=4\cdot\left(x^3-\dfrac{1}{x^3+3}\right)^3\cdot\left(x^3-\dfrac{1}{x^3+3}\right)'=12x^2\cdot\left(x^3-\dfrac{1}{x^3+3}\right)^3\cdot\left(1+\dfrac{1}{(x^3+3)^2}\right)$

5. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x};\quad x\in(-1,1)$.

Решење:

$$y=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=-\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{x^2-1}$$

6. $y=\sin\dfrac{1}{x}\quad ,\ x\neq 0$ $\qquad \left[y'=-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\right]$

7. $y=\sin(\sin x)$ $\qquad [y'=\cos x\cdot\cos(\sin x)]$

8. $y=tg\dfrac{x+1}{2}$ $\qquad \left[y'=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}\right]$

9. $y=\ln(\cos x),\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad [y'=-tgx]$

10. $y=e^{\sqrt{x}}\quad ,\ x\geq 0$ $\qquad [\,y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\qquad x>0\,]$

Додатни задаци:

11. $y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^3$, $x\neq 0$ $\left[y'=\frac{-3(x+1)^2}{x^4}\right]$

12. $y=e^{\sin x}$ $\left[y'=\cos x\cdot e^{\sin x}\right]$

13. $y=\ln\left(x^3+1\right)$, x>-1 $\left[y'=\frac{3x^2}{x^3+1}\right]$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 131, 132 а-ђ) .

Ток другог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Понављање извода сложене функције $\boxed{F'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)}$

Главни део часа: 35 мин.

Задаци: Израчунати изводе следећих функција у тачкама у којима они постоје:

1. (Збирка 133. задатак) $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$

2. (Збирка 137. задатак) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$

3. (Збирка 138. задатак) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$

4. (Збирка 140. задатак) $y=\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

5. (Збирка 151. задатак) $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

6. (Збирка 157. задатак б)) Израчунати $f'(0)$ и $f'(1)$, ако је $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

7. (Збирка 158. задатак б)) Израчунати $0{,}01\cdot f'(0{,}01)$ ако је $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}$

8. (Збирка 159. задатак б))
Доказати $f'(x)-2x\cdot f(x)+\dfrac{1}{3}f(0)-f'(0)=1$, ако је $f(x)=3e^{x^2}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 132. е-ћ), 157. а), 158. а), 159. а).

Редни број часа _____

Наставна јединица: Логаритамски извод и извод имплицитно задате функције.
Тип часа: обрада, понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка, хеуристичка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање и примену раније стечених знања
Образовни задатак: Усвајање основних правила диференцирања и њихова примена
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о значају повезивања градива,
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива, аналитичности и систематичности
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: логаритамски извод, имплицитно задата функција

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Функција може бити задата експлицитно, у облику $y = f(x)$ или имплицитно, у облику $f(x, y) = 0$.

Пример 1: $y = x^2 - 2x$ је пример експлицитно задате функције, а $y - x^2 + 2x = 0$ је имплицитно задата функција.

Главни део часа: 35 мин.

Наћи извод имплицитно задатих функција:

Пример 2. $x^2 + y^2 = 25$ $\left[2x + 2yy' = 0, y' = -\frac{x}{y};\quad y \neq 0\right]$

Пример 3. $9x^2 + 4y^2 = 36$ $\left[18x + 8yy' = 0, y' = -\frac{9x}{4y};\quad y \neq 0\right]$

Пример 4. $y^2 = 16x$ $\left[2yy' = 16, y' = \frac{8}{y};\quad y \neq 0\right]$

Пример 5. $y^2 = 9(x-4)$ $\left[2yy' = 9, y' = \frac{9}{2y};\quad y \neq 0\right]$

Задаци: Наћи извод функција применом логаритма:

1. $y = (x+1)^x$

   Решење: $\ln y = \ln(x+1)^x, \quad \ln y = x\ln(x+1)$.

   Диференцирањем предходне једнакости добијамо

   $\frac{1}{y}y' = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}, \quad y' = \left(\frac{1}{x+1} + \ln(x+1)\right)y = \left(\frac{1}{x+1} + \ln(x+1)\right)(x+1)^x$.

2. $y = (\sin x)^x$

   Решење: $\ln y = \ln(\sin)^x, \ln y = x\ln(\sin x)$.

   Диференцирањем предходне једнакости добијамо

   $\frac{1}{y}y' = \ln(\sin x) + \frac{1}{\sin x}, \quad y' = \left(\ln(\sin x) + \frac{1}{\sin x}\right)y = \left(\ln(\sin x) + \frac{1}{\sin x}\right)\cdot(\sin x)^x$.

3. $y = (2x+1)^{\ln x}$

   Решење: $\ln y = \ln(2x+1)^{\ln x}, \quad \ln y = \ln x \cdot \ln(2x+1)$.

   Диференцирањем предходне једнакости добијамо

   $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x}\ln(2x+1) + \ln x\frac{1}{2x+1}$, *следи*

   $y' = \left(\frac{1}{x}\ln(2x+1) + \ln x\frac{1}{2x+1}\right)y = \left(\frac{1}{x}\ln(2x+1) + \ln x\frac{1}{2x+1}\right)\cdot(2x+1)^{\ln x}$.

4. Израчунај $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ако је $y = f(x) = (2x)^x$.

   Решење: $\ln y = \ln(2x)^x, \ln y = x\ln(2x)$.

   Диференцирањем предходне једнакости добијамо

   $\frac{1}{y}y' = \ln(2x) + \frac{1}{2}, y' = \left(\ln(2x) + \frac{1}{2}\right)y = \left(\ln(2x) + \frac{1}{2}\right)\cdot(2x)^x, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Додатни задаци:

5. $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 6 = 0$ $\left[2x + 2 + 2yy' - 6y' = 0, y' = \frac{x+1}{3-y};\quad y \neq 3\right]$

6. Израчунај $f'(e)$ ако је $y = f(x) = (\ln x)^x$.

   Решење: $\ln y = \ln(\ln x)^x, \ln y = x\ln(\ln x)$.

   Диференцирањем предходне једнакости добијамо

   $\frac{1}{y}y' = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}, y' = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)y = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)\cdot(\ln x)^x$.

   $f'(e) = 1$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 165. а и в)

Редни број часа _____

Наставна јединица: Изводи вишег реда
Тип часа: обрада, понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка, хеуристичка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања из различитих разреда у јединствену целину.
Образовни задатак: Научити технику проналажења извода вишег реда
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о значају примене ранијих знања, самопоуздање и мотивација
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: изводи вишег реда

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Нека је $f(x)$ диференцијабилна функција, тј. постоји њен извод $f'(x)$. Ако постоји извод функције $f'(x)$, он се дефинише као други извод функције $f(x)$ и обележава са $f''(x)$.

Уопштено n-ти извод функције је $\boxed{f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'}$

Ознаке за изводе у Лагранжовој нотацији су $f', f'', f''', f^{IV} = f^{(4)},...$

У Лајбницовој нотацији ознака за други извод је $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Главни део часа: 35 мин.

1. Одреди други извод следећих функција:

   а) $y = x^5 - 8x^3 + 2x - 1$

б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
в) $y = \left(x^2 + 5x - 1\right) \cdot e^x$
г) $y = \ln(\sin x)$
д) $y = x^2 \ln x$
ђ) $y = \cos^2 x$
е) $y = \ln(x + 1)$
ж) $y = x \cdot arctgx$

2. (Збирка 170.а)) Доказати да функција $y = e^x \sin x$ задовољава једначину

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

3. (Збирка 170.б)) Доказати да функција $y = \sqrt{2x - x^2}$ задовољава једначину $y^3 y'' + 1 = 0.$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 167 а)-ђ)

Редни број часа _____

Наставна јединица: Одређивање тангенте и нормале криве.
Тип часа: обрада, понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка, хеуристичка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања из различитих разреда у јединствену целину.
Образовни задатак: Научити одређивање тангенте и нормале криве применом извода, као и давање геометријског приказа истих
Васпитни задатак: развити код ученика свест о значају повезивања градива, развити уредност и прецизност
Функционални задатак: развијање способности за повезивање градива из аналитичке геометрије, примене извода и геометријске интерпретације истих
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.2.4. Користи координатни систем за представљање једноставних геометријских објеката у равни.
2.МА.1.2.5. Препознаје криве другог реда.
2.МА.3.2.3. Решава проблеме користећи једначине кривих другог реда и њихових тангенти у координатом систему
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: тангента криве, нормала криве

Уводни део часа: 5 мин.

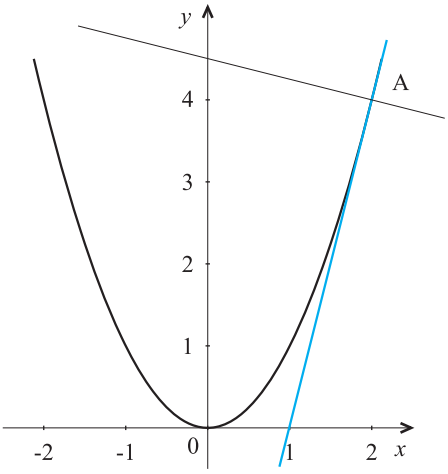
Контрола домаћег задатка.
Поновити једначине правих кроз једну тачку и кроз две тачке, као и услов нормалности и паралелности правих.

Главни део часа: 35 мин.

Коефицијент правца тангенте графика функције у тачки $A(x_A, y_A)$, једнак је вредност првог извода у тој тачки $k = f'(x_A)$.
Једначина тангенте графика функције у тачки $A\ (x_A, y_A)$ гласи: $\boxed{y - y_A = k \cdot (x - x_A)}$
Једначина нормале графика функције у тачки $A(x_A, y_A)$ гласи: $\boxed{y - y_A = -\frac{1}{k} \cdot (x - x_A)}$

1. (Збирка 174. задатак)

Одреди једначину тангенте и нормале криве: $y = x^2$ у тачки M(2,4).



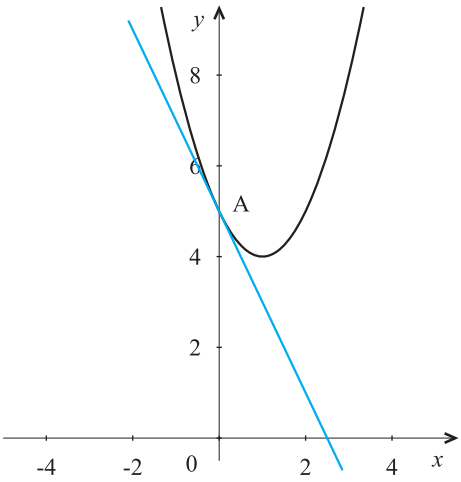
Решење: $y' = 2x$ па је k=4

Једначина тангенте у тачки M је

$$y - y_M = k \cdot (x - x_M)$$
$$y - 4 = 4(x - 2)$$
$$y = 4x - 4$$

Једначина нормале у тачки M је

$$y - y_M = -\frac{1}{k} \cdot (x - x_M)$$
$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$
$$x + 4y - 18 = 0$$



2. (Збирка 175. задатак, г))

Одреди једначину тангенте криве: $y = x^2 - 2x + 5$ у тачки пресека са Оу.

Решење: Пресек са Оу је тачка A(0,5)

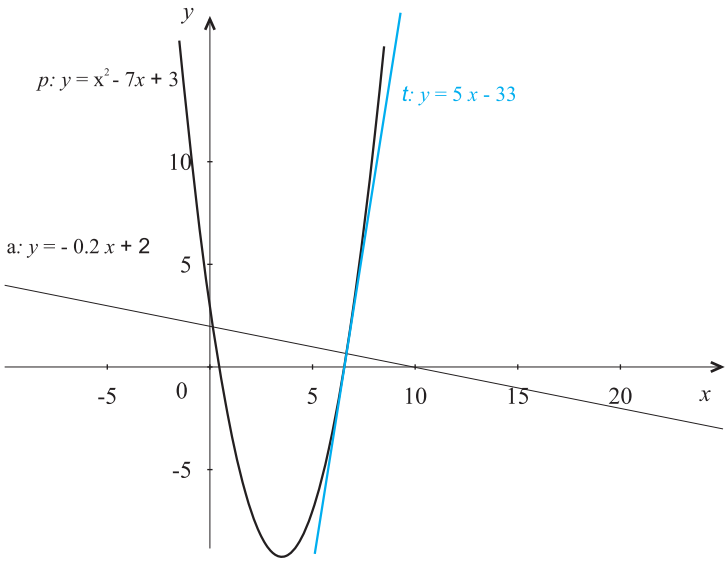
$y' = 2x - 2$ па је $k = -2$

Једначина тангенте у тачки A је

$$y - y_A = k \cdot (x - x_A)$$
$$y - 5 = -2(x - 0)$$
$$y = -2x + 5$$

3. Одреди једначину тангенте параболе: $y = x^2 - 7x + 3$ која је нормална на праву $y = -\frac{1}{5}x + 2$.

Решење: Користећи услов нормалности правих закључујемо да је коефицијент правца тангенте *k*=5.



$k = y'$ *односно* $5 = 2x - 7$ $\quad x = 6 \quad y = 6^2 - 7 \cdot 6 + 3 = -3 \quad T(6,-3)$

Једначина тангенте у тачки T је

$y - y_T = k \cdot (x - x_T) \quad y - (-3) = 5(x - 6) \quad y = 5x - 33$

4. Одреди једначину тангенте криве: $y = x^3 + 3x^2 - 5$ која је нормална на праву $2x - 6y + 1 = 0$.

Решење: Експлицитни облик једначине праве је $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$. Користећи услов нормалности правих закључујемо да је коефицијент правца тангенте k=-3.

$k = y'$ *односно* $-3 = 3x^2 + 6x \quad x = -1 \quad y = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 = -3 \quad T(-1,-3)$

Једначина тангенте у тачки T је

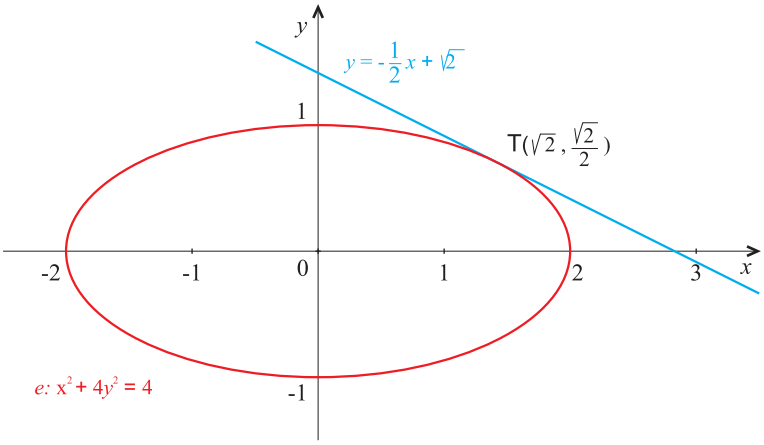
$y - y_T = k \cdot (x - x_T) \quad y - (-3) = -3(x + 1) \quad y = -3x - 6$

5. (Збирка 179. задатак)

Одреди једначине тангенте и нормале хиперболе: $y = \frac{1}{x}$ у тачки $x_0 = \frac{1}{2}$.

Решење:

$y' = -\frac{1}{x_0^2} \quad k = -4 \quad y_0 = \frac{1}{x_0} = 2 \quad t: y = -4x + 4$



6. Одреди једначину тангенте елипсе $x^2 + 4y^2 = 4$ у тачки $T\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решење:

$2x + 8yy' = 0 \quad y' = -\frac{x}{4y}$

$k = y'(T) = -\frac{1}{2}$

$t: y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке : 175, 176.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Лопиталова теорема
Тип часа: обрада, понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка, хеуристичка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: развијање способности анализе задатка и математичке аргументације
Образовни задатак: Научити практичну примену Лопиталове теореме у задацима
Васпитни задатак: Развијање прецизности и уредности
Функционални задатак: Развијање аналитичности
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: Лопиталова теорема

Ток првог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Теорема (Лопиталова):

1. Нека су функције $f(x), g(x)$ дефинисане на $(a,b]$ и важи $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.
   Ако постоје $f'(x), g'(x)$ на $(a,b]$, тада је $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ за $g'(x)\neq 0$.

2. Нека су функције $f(x), g(x)$ дефинисане на $(a,b]$ и важи $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$
   Ако постоје $f'(x), g'(x)$ на $(a,b]$, тада је $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ за $g'(x)\neq 0$.

Применом Лопиталове теореме одреди следеће граничне вредности:

1. (Збирка 192. задатак, в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-x+1}$

Решење:

Уколико у израз $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-x+1}$ заменимо вредност x=1 добићемо $\dfrac{1-1-1+1}{1-1-1+1}=\dfrac{0}{0}$, што значи да можемо применити Лопиталово правило, односно урадити извод

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-x^2-x+1\right)'}{\left(x^4-x^3-x+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{4x^3-3x^2-1}.$$

Поново заменимо x=1 у добијени израз $\dfrac{3\cdot 1-2\cdot 1-1}{4\cdot 1-3\cdot 1-1}=\dfrac{0}{0}$. Опет примењујемо Лопиталово правило $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{4x^3-3x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(3x^2-2x-1\right)'}{\left(4x^3-3x^2-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x-2}{12x^2-6x}$ и добијамо резултат:

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x-2}{12x^2-6x}=\frac{6\cdot 1-2}{12\cdot 1^2-6\cdot 1}=\frac{2}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x-5x^2}{x^2}$

Решење:

Уколико у израз $\dfrac{1-\cos 4x-5x^2}{x^2}$ заменимо вредност x=0 добићемо $\dfrac{1-\cos 0-5\cdot 0}{0}=\dfrac{0}{0}$, што значи да можемо применити Лопиталово правило, односно урадити извод

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x-5x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 4x-5x^2\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 4x-10x}{2x}$$

Поново заменимо x=0 у добијени израз и закључујемо $\dfrac{-4\sin 4\cdot 0-10\cdot 0}{2\cdot 0}=\dfrac{0}{0}$, што значи да можемо применити Лопиталово правило, односно урадити извод

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\sin 4x-10x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(-4\sin 4x-10x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\cos 4x\cdot 4-10}{2}$ и добијамо резултат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 4x\cdot 4-10}{2}=\frac{-4\cdot\cos 0\cdot 4-10}{2}=-13$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4x)+4x}{x^2}$

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)+4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-4x}\cdot(-4)+4}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{8}{4x-1}=-8$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x - x^2}{x}$

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x - x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x\cdot 5 - 2x}{1} = 5$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x - x^2 - 1}{x^2}$

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x\cdot 2 - 2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x\cdot 4 - 2}{2} = -3$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 2 - 2}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 4}{2} = 2$$

Додатни задаци:

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10} - 10x + 9}{(x-1)^2}$ [45]

8. $\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{\ln\left(x^2 - 8\right)}{2x^2 - 5x - 3}$ $[\frac{6}{7}]$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{3x - \pi}$ $[-\frac{1}{3}]$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 192 а, б, г), 194.

Ток другог часа:

Уводни део часа: 5 мин.
Контрола домаћег задатка. Поновити Лопиталову теорему.

Главни део часа: 35 мин.

Применом Лопиталове теореме одреди следеће граничне вредности:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ $[\infty]$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ $\left[\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0\right]$
3. $\lim\limits_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}}$ $\left[\lim\limits_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\infty\right]$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$ $\left[\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0\right]$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ $[\infty]$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$ $[\frac{1}{3}]$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$ $[2]$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$ $\left[\frac{2e}{e-1}\right]$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 193

Редни број часа _____

Наставна јединица: Примена извода на испитивање особина функција.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор, Геогебра
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену првог извода на испитивање монотоности и екстремних вредности функције
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.4. У функцијама које су представљене графички или табеларно, анализира, примењује и приближно израчунава брзину промене помоћу прираштаја.
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: монотоност и екстремна вредност функције

Уводни део часа: 5 мин.

Поновити појам монотоности и ексремних вредности функције кроз постављања питања ученицима и цртања графика познате произвољне функције (нпр. $y = \sin x$).

Главни део часа: 35 мин.

Дефиниција: Нека је $f:[a,b] \to R$. Кажемо да функција f има (локални) максимум у тачки $x_0 \in (a,b)$ ако постоји $\delta > 0$ тако да је $f(x) \le f(x_0)$ за свако $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Дефиниција: Нека је $f:[a,b] \to R$. Кажемо да функција f има (локални) минимум у тачки $x_0 \in (a,b)$ ако постоји $\delta > 0$ тако да је $f(x) \ge f(x_0)$ за свако $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Минимум и максимум су екстремне вредности функције.

(Потребно је објаснити реч локални, односно да функција може имати више минимума и максимума.)

Теорема: Ако функција f има екстремну вредност у тачки x_0 и ако има извод у тој тачки, тада је $f'(x_0)=0$.
Важно је нагласити да услов $f'(x_0)=0$ није довољан, већ само потребан за постојање екстремне вредности функције. Тачке у којима је $f'(x_0)=0$ називају се стационарне тачке.

Пример: Функција $f(x)=x^3$ има први извод $f'(x)=3x^2$. За $x = 0$ први извод има вредност нула, али у тачки $x = 0$ наведена функција нема екстремну вредност.

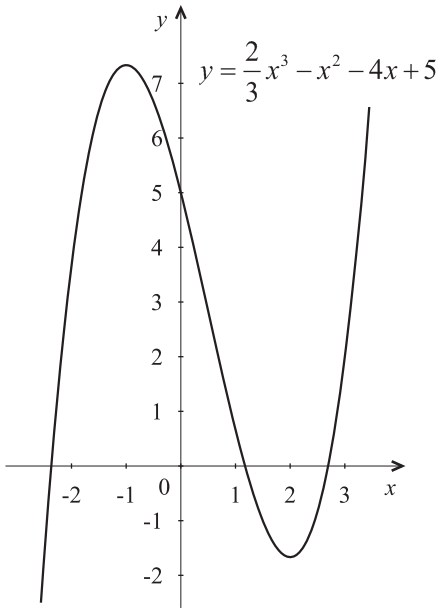
Теорема: Нека је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[a,b]$ и диференцијабилна на интервалу (a,b). Функција $f(x)$ је монотоно растућа у интервалу (a,b) ако и само ако је $f'(x)>0$ за све $x\in(a,b)$.
Функција $f(x)$ је монотоно опадајућа у интервалу (a,b) ако и само ако је $f'(x)<0$ за све $x\in(a,b)$.

Задаци:

(Задатке илуструјемо графиком који је нацртан нпр. у Геогебри. Наставник може да користи софтвер за паметну таблу или само пројектор и рачунар. Функција може и да се нацрта на табли, али је пожељно да се користе боје како би ученици уочили раст и опадање функције на графичком приказу.)

1. (Збирка 197. в) Одреди интервале раста и опадања и екстремне вредности функције:

$$y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$$



Решење:

$y'=2x^2-2x-4=0$

$x_1=-1 \quad x_2=2$

$y'=2x^2-2x-4$	+ + +	-	+ + +
y	↗	↘	↗

$-\infty \qquad -1 \qquad 2 \qquad \infty$

Функција има две екстремне вредости $T_{\max}\left(-1,7\frac{1}{3}\right)$ и $T_{\min}\left(2,-1\frac{2}{3}\right)$. Функција је монотоно растућа за $x\in(-\infty,-1)$ и $x\in(2,+\infty)$. Функција је монотоно опадајућа за $x\in(-1,2)$.

2. Одреди интервале раста и опадања и екстремне вредности функције:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}.$$

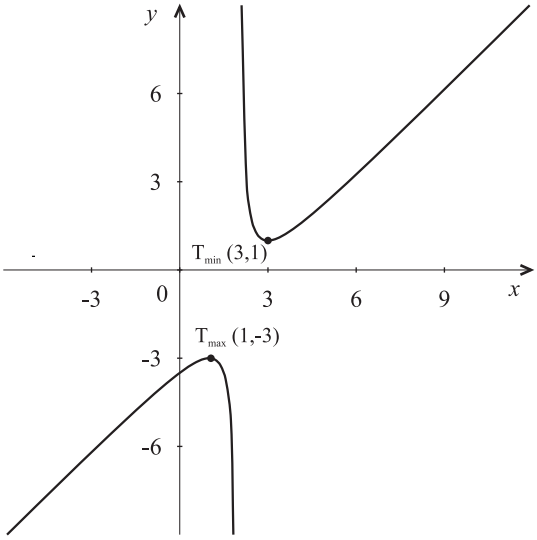
Решење:

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0$$

x^2-4x+3	+ + +	- - -	- - -	+ + +
$(x-2)^2$	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
$f'(x)$	+ + +	- - -	- - -	+ + +
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

$-\infty$ 1 2 3 ∞

Функција има две екстремне вредости $T_{\max}(1,-3)$ и $T_{\min}(3,1)$. Функција је монотоно растућа за $x\in(-\infty,1)$ и $x\in(3,+\infty)$. Функција је монотоно опадајућа за $x\in(1,2)$ и за $x\in(2,3)$.



3. (Збирка 197. з) Одреди интервале раста и опадања и екстремне вредности функције:

$$f(x)=(x^2-2x+1)\cdot e^x$$

Решење:

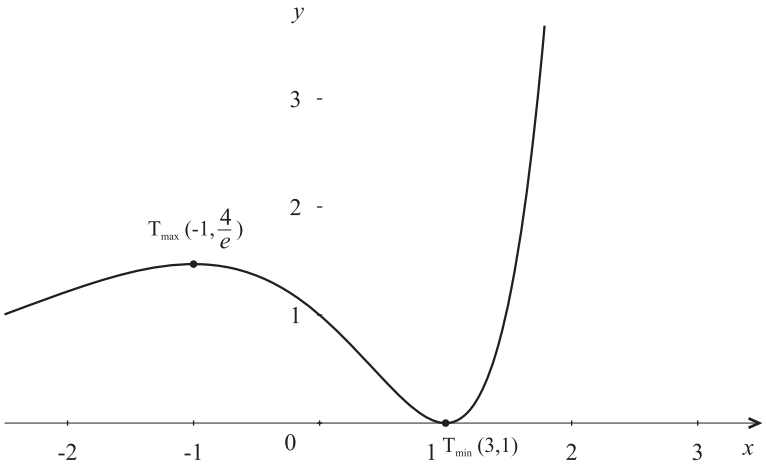
$$f'(x)=(x^2-1)\cdot e^x=0$$

$$x^2-1=0$$

$$x=-1 \quad x=1$$

x^2-1	+ + +	- - -	+ + +
e^x	+ + +	+ + +	+ + +
$f'(x)$	+ + +	- - -	+ + +
$f(x)$	↗	↘	↗

$-\infty$ -1 1 ∞



Функција има две екстремне вредости $T_{\max}\left(-1,\frac{4}{e}\right)$ и $T_{\min}(1,0)$. Функција је монотоно растућа за $x\in(-\infty,-1)$ и за $x\in(1,+\infty)$. Функција је монотоно опадајућа за $x\in(-1,1)$.

4. (Збирка 198. з) Одреди интервале раста и опадања и екстремне вредности функције: $f(x)=x-\ln x$

Решење:

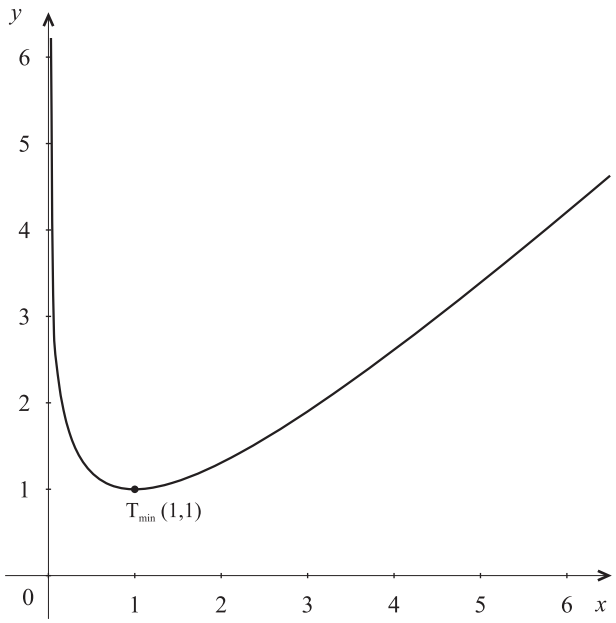
$D=(0,+\infty)$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}=0$$

$$x=1$$

x-1		- - - - -	+ + + +
x		+ + + + + + + + + +	
$f'(x)$		- - - - -	+ + + +
$f(x)$		↘	↗
	0	1	∞

Функција има једну екстремну вредност $T_{\min}(1,1)$. Функција је монотоно растућа за $x\in(1,+\infty)$. Функција је монотоно опадајућа за $x\in(0,1)$.



Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 197. г, ђ, е, ж)

Редни број часа _____

Наставна јединица: Примена извода на испитивање особина функција.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор, Geogebra
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену другог извода на испитивање конвексности и превојних тачака функције
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.3.4. У функцијама које су представљене графички или табеларно, анализира, примењује и приближно израчунава брзину промене помоћу прираштаја.
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: конвексност и превојне тачке функције

Уводни део часа: 5 мин.

Увести појам конвексности и превојних тачака кроз постављања питања ученицима и цртања графика познате произвољне функције (нпр. $y = \sin x$).

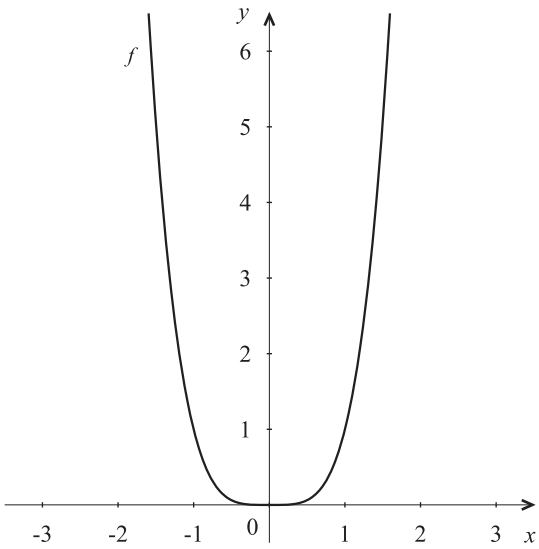
Главни део часа: 35 мин.

Теорема: Ако функција $y = f(x)$ има други извод у интервалу (a,b) i ako je $f''(x_0) \geq 0$, тада је функција конвексна (конвексна на горе) на интервалу (a,b).

Теорема: Ако функција $y = f(x)$ има други извод у интервалу (a,b) и ako je $f''(x_0) \leq 0$, тада је функција конкавна (конвексна на доле) на интервалу (a,b).

Дефиниција: Тачка у којој функција мења конвексност зове се превојна тачка функције.

Пример 1: $y = x^4$
Решење: $y' = 4x^3$ $\qquad$ $y'' = 12x^2$



$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$y'' = 12x^2$	$+++$	$+++$
y	$\cup$	$\cup$

$-\infty \qquad 0 \qquad +\infty$

Функција нема превојну тачу у $x = 0$, јер нема промене конвексности у тој тачки.

Пример 2: $y = x^3$

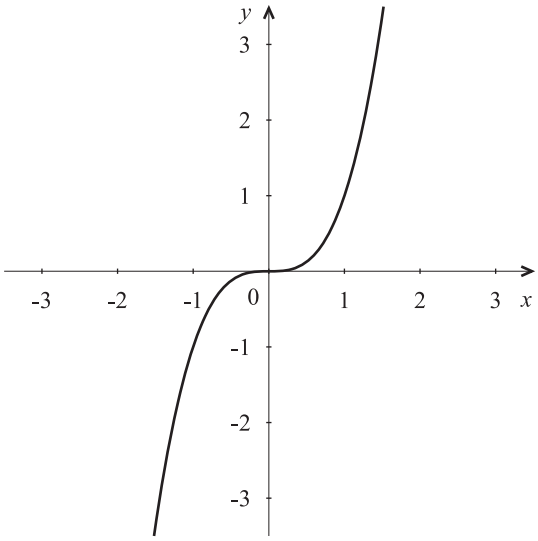
Решење: $y' = 3x^2$ $\qquad y'' = 6x$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$P(0,0)$

$y'' = 6x$	- - -	$+++$
y	$\cap$	$\cup$

$-\infty \qquad 0 \qquad +\infty$



Задаци:

(Задатке илуструјемо графиком који је нацртан нпр. у Геогебри. Наставник може да користи софтвер за паметну таблу или само пројектор и рачунар. Функција може и да се нацрта на табли, али је пожељно да се користе боје како би ученици уочили конвексност и конкавност функције на графичком приказу.)

1. (Збирка 205. а) Одреди конвексност и конкавност и превојне тачке графика функције:

$y = x^4 - 6x^2 + 4$

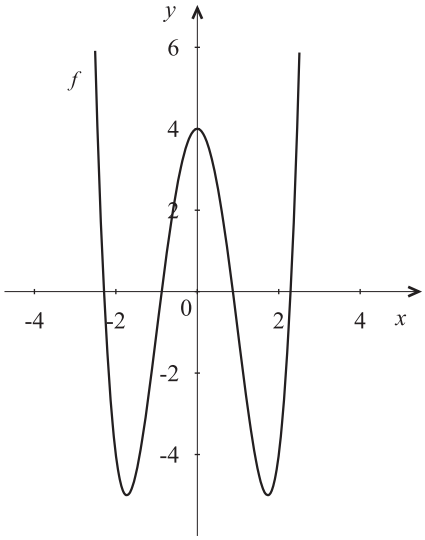
Решење:

$y'' = 12x^2 - 12 = 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

$y'' = 12x^2 - 12$	$+++$	$---$	$+++$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad \infty$



Функција има две превојне тачке $P_1(-1,-1)$ и $P_2(1,-1)$. Функција је конвексна за $x\in(-\infty,-1)$ и $x\in(1,+\infty)$. Функција је конкавна за $x\in(-1,1)$.

2. (збирка 205.г)) Одреди конвексност и конкавност и превојне тачке графика функције: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+12}$.

Решење:

$$f'(x)=\frac{x^4+36x^2}{(x^2+12)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-24x^3+864x}{(x^2+12)^3}=0$$

-24x	+ + +	+ + +	− − −	− − −
$-x^2+36$	− − −	+ + +	+ + +	− − −
$(x^2+12)^3$	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
$f''(x)$	− − −	+ + +	− − −	+ + +
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$-\infty$ $\quad -6 \quad$ 0 $\quad 6 \quad$ ∞

Функција има три превојне тачке $P(-6,1084), P(0,4)$, $P(6,1084)$. Функција је конкавна за $x\in(-6,0)$ и $x\in(6,+\infty)$. Функција је конвексна за $x\in(-\infty,-6)$ и $x\in(0,6)$.

3. (збирка 205.ђ) Одреди конвексност и конкавност и превојне тачке графика функције: $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$

Решење:

$$f'(x)=(x^2+2x+1)\cdot e^x$$

$$f''(x)=(x^2+4x+3)\cdot e^x=0$$

x^2+4x+3	+ + +	- - -	+ + +
e^x	+ + +	+ + +	+ + +
$f''(x)$	+ + +	- - -	+ + +
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 3 $\quad \infty$

Функција има две превојне тачке $P\left(-1,\dfrac{2}{e}\right)$ и $P(3,10e^3)$. Функција је конвексна за $x\in(-\infty,-1)$ и за $x\in(3,+\infty)$. Функција је конкавна за $x\in(-1,3)$.

4. Одреди конвексност и конкавност и превојне тачке графика функције: $f(x)=x-\ln x$

Решење:

$D=(0,+\infty)$ $\qquad f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$f''(x)$		+ + + +
$f(x)$		$\cup$

0 $\quad \infty$

Функција је конвексна на целом домену и нема превојне тачке.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 205. б, в, е)

Редни број часа _____

Наставна јединица: Асимптоте графика функције
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор, ГеоГебра
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену граничне вредности функције на одређивање асимптота графика функције
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.5. Разуме концепт непрекидности и израчунава једноставне граничне вредности функција.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: асимптоте графика функције

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Поновити појам асимптота функције помоћу графика познате функције (нпр. експоненцијалне или логаритамске).

Главни део часа: 35 мин.

(Задатке илуструјемо графиком који је нацртан у Геогебри. Наставник може да користи софтвер за паметну таблу или само пројектор и рачунар. Функција може и да се нацрта на табли уколико наставник има припремљену илустрацију.)

Дефиниција: Права $x = a$ је вертикална асимптота графика функције $f(x)$ ako je $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$.

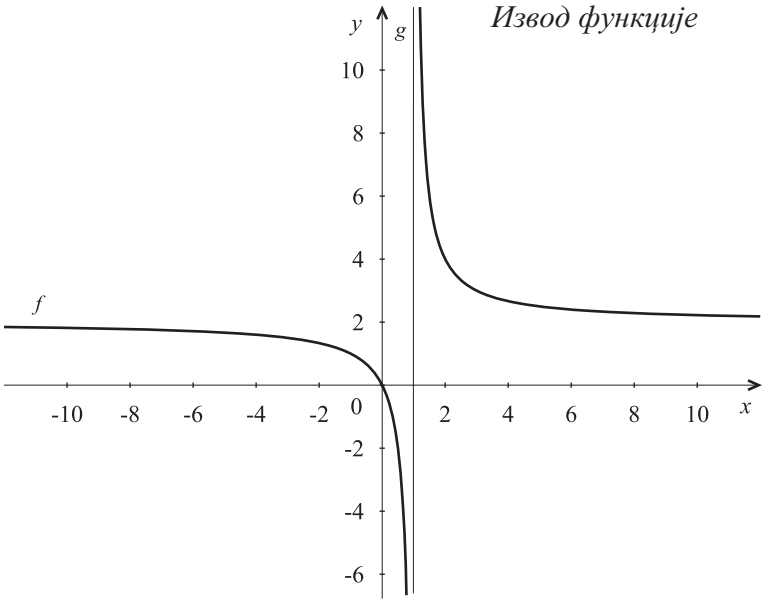
Пример 1: $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

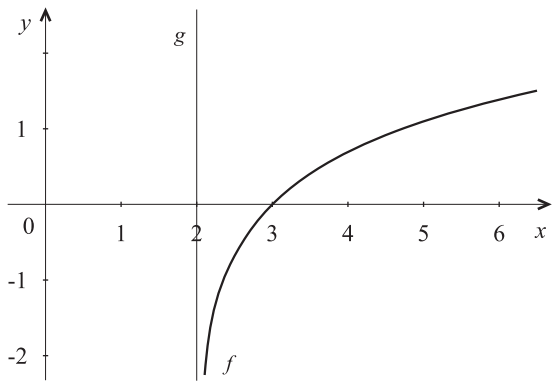
Решење: $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{2x}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{2x}{x-1}=+\infty$$

Вертикална асимптота је права $x = 1$.





Пример 2: $f(x)=\ln(x-2)$

Решење: $D=(2,+\infty)$

$$\lim_{x\to 2+}\ln(x-2)=-\infty$$

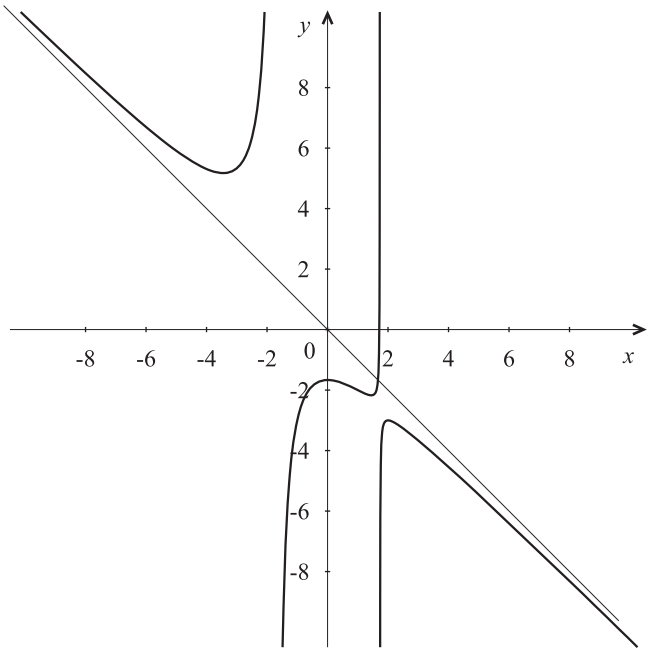
Вертикална асимптота је права $x = 2$.

Теорема: Нека је $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$. Права $y=kx+n$, је коса асимптота графика функције $f(x)$ ако је $k\neq 0$. Права $y=kx+n$, је хоризонтална асимптота графика функције $f(x)$ ако је $k=0$.

Пример 3: (збирка 87. е) $f(x)=\frac{x^3-5}{3-x^2}$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5}{3x-x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}$$

$k=-1$



$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-5}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5+3x-x^3}{3-x^2}$$

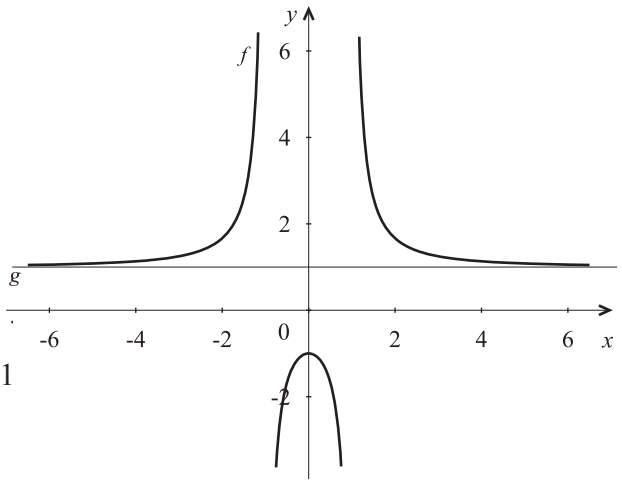
$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{-5}{x^2}+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}=0$$

Права $y=-x$ је коса асимптота функције $f(x)$.

Пример 4: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=0$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=1$$



Права $y=1$ је хоризонтална асимптота функције $f(x)$.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 87. б, в, г)

Редни број часа _____

Наставна јединица: Испитивање функција
Тип часа: утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор, Геогебра
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену граничне вредности и извода функције на испитивање графика функције
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.5. Разуме концепт непрекидности и израчунава једноставне граничне вредности функција.
2.МА.2.3.7. Решава проблеме минимума и максимума користећи извод функције
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: график функције

Ток првог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. (збирка 208.в)) Испитај ток и нацртај график функције $f(x)=x^3-4x^2-3x+12$

Решење:
ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $D:(-\infty,+\infty)$
ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна.
НУЛЕ И ЗНАК:

$$x^3-4x^2-3x+12=0$$

$$x^2(x-4)-3(x-4)=0$$

$(x^2-3)(x-4)=0$

$x^2-3=0 \quad \vee \quad x-4=0$

$x=\pm\sqrt{3} \quad \vee \quad x=4$

x^2-3	+	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
y	-	+	-	+
	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	4 $\quad +\infty$

$y<0 \quad x\in(-\infty,-\sqrt{3})\wedge x\in(\sqrt{3},4)$ $\qquad$ $y>0 \quad x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})\wedge x\in(4,+\infty)$

АСИМПТОТЕ: нема

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$f'(x)=3x^2-8x-3=0$

$x_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}$

$x=-\dfrac{1}{3} \quad \vee \quad x=3$

$3x^2$-8x-3	+	-	+
y`	↗	↘	↗
	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	3 $\quad +\infty$

$T_{\max}\left(-\dfrac{1}{3},12\dfrac{14}{27}\right) \qquad T_{\min}(3,-6)$

Функција је растућа за $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\wedge x\in(3,+\infty)$, а опадајућа за $x\in\left(-\dfrac{1}{3},3\right)$.

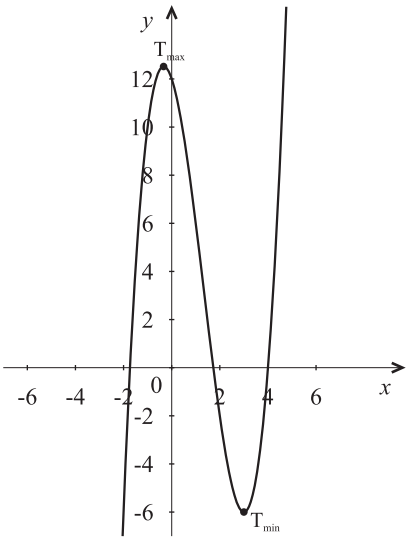
КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$f''(x)=6x-8=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{4}{3}$

Превојна тачка $P\left(\dfrac{4}{3},4\dfrac{7}{27}\right)$.

$6x$-8	-	+
y''	-	+
	∩	∪
	$-\infty$	$\frac{4}{3}$ $\quad +\infty$

ГРАФИК:



Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Испитати ток и нацртати график функције $f(x)=x^3+6x^2+9x$

(Наставник припремљену функцију приказује на следећем часу како би са ученицима извршио анализу домаћег задатка.)

Решење:

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $D:(-\infty,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК:

$x^3+6x^2+9x=0$

$x(x^2+6x+9)=0$

$x\cdot(x+3)^2=0$

$x=0 \quad \vee \quad x+3=0$

$x=0 \quad \vee \quad x=-3$

x	-	-	+
$(x-3)^2$	+	+	+
y	-	-	+
$-\infty$	0	- 3	$+\infty$

$y<0, x\in(-\infty,-3)\cup(-3,0), \qquad y>0, x\in(0,+\infty)$

АСИМПТОТЕ: нема

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$f'(x)=3x^2+12x+9=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-12\pm\sqrt{144-108}}{6}$

$x=-3 \quad \vee \quad x=-1$

$T_{\max}(-3,0) \quad T_{\min}(-1,-4)$

$3x^2$+12x+9	+	-	+
y`	↗	↘	↗
$-\infty$	-3	-1	$+\infty$

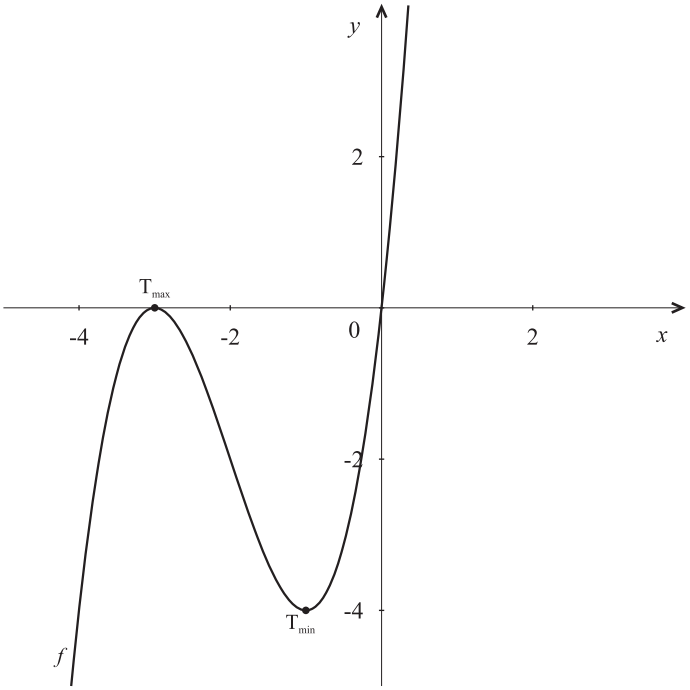
Функција је растућа за $x\in(-\infty,-3)\wedge x\in(-1,+\infty)$, а опадајућа за $x\in(-3,-1)$.

КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$f''(x)=6x+12=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

Превојна тачка $P(-2,-2)$.

$6x$+12	-	+
y``	-	+
	∩	∪
$-\infty$	-2	$+\infty$



Ток другог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. Испитај ток и нацртај график функције: $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Решење:

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ**:** $x^2+1 \neq 0$ $D:(-\infty,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција је непарна $f(-x) = -f(x)$

НУЛЕ И ЗНАК**:** $2x = 0$, $x = 0$

$2x$	-	+
x^2+1	+	+
y	-	+
	$-\infty$ 0	$+\infty$

$y<0 \quad x \in (-\infty,0)$ $\quad y>0 \quad x \in (0,+\infty)$

АСИМПТОТЕ**:** Функција нема вертикалне асимптоте.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}\overset{:x^2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

Хоризонтална асимптота је права $y=0$.

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y'=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0$$

$2-2x^2=0 \qquad x^2=1 \qquad x=-1 \ \vee x=1$

$2-2x^2$	-	+	-
$\left(x^2+1\right)^2$	+	+	+
y`	-	+	-
	↘	↗	↘

$-\infty$ -1 1 $+\infty$

Функција опадајућа за $x\in(-\infty,-1)\wedge x\in(1,+\infty)$, а растућа за $x\in(-1,1)$. $x\in(-1,1)$.
Екстремне вредности су $T_{max}(1,1)$, $T_{min}(-1,-1)$.

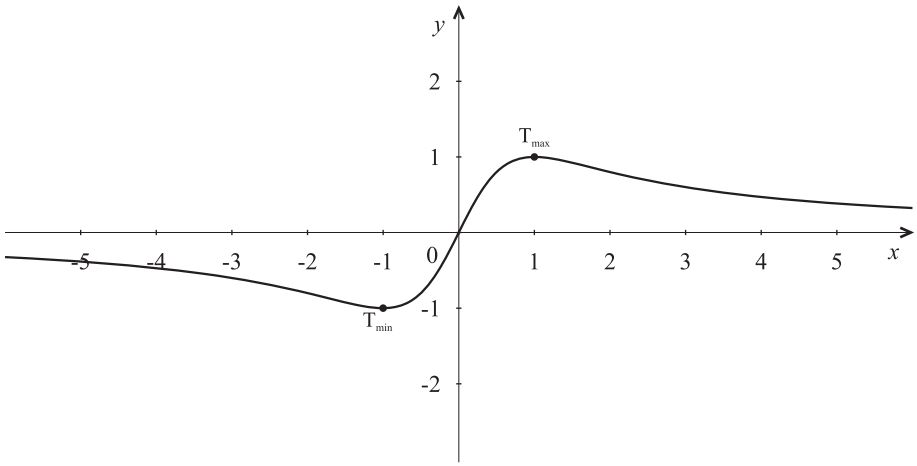
КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$$y'=\frac{-4x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(2-2x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{\left(x^2+1\right)\cdot 4x\cdot\left(-\left(x^2+1\right)-\left(2-2x^2\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{4x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0$$

$4x=0 \quad \vee \quad x^2-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \vee \quad x=\pm\sqrt{3}$

Превојне тачке су P(0,0), $P\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$4x$	-	-	+	+
x^2-3	+	-	-	+
$\left(x^2+1\right)^3$	+	+	+	+
y''	-	+	-	-
	∩	∪	∩	∪
$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$



Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Испитати ток и нацртати график функције $f(x)=x^3-4x^2+4x$

Решење:

(Наставник припремљену функцију приказује на следећем часу како би са ученицима извршио анализу домаћег задатка.)

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $D:(-\infty,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК:

$x^3-4x^2+4x=0$

$x(x^2-4x+4)=0$

$x\cdot(x-2)^2=0$

$x=0 \quad \vee \quad x-2=0$

$x=0 \quad \vee \quad x=2$

x	-	+	+
$(x-2)^2$	+	+	+
y	-	+	+
$-\infty$	0	2	$+\infty$

$y<0 \quad x\in(-\infty,0)$ $\qquad$ $y>0 \quad x\in(0,2)\wedge x\in(2,+\infty)$

АСИМПТОТЕ: нема

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6}$

$x = \dfrac{2}{3} \quad \vee \quad x = 2$

$T_{\max}\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{32}{27}\right) \quad T_{\min}(2,0)$

$3x^2$-8x-3	+	-	+
y`	↗	↘	↗
$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$

Функција је растућа за $x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \wedge x \in (2, +\infty)$, а опадајућа за $x \in \left(\dfrac{2}{3}, 2\right)$.

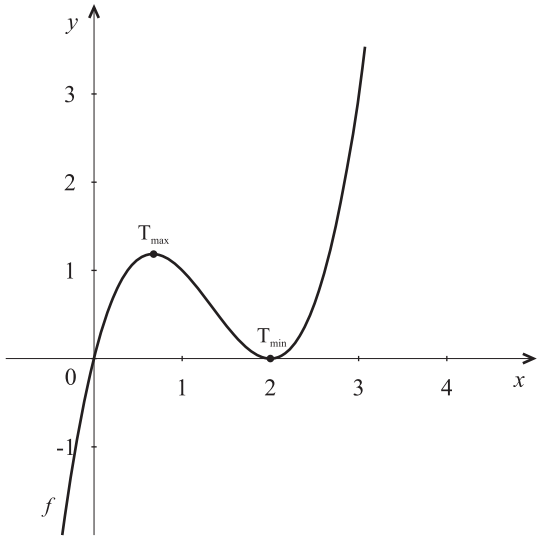
КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$f''(x) = 6x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4}{3}$

Превојна тачка $P\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$.

6x+12	-	+
y``	-	+
	∩	∪
$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$

ГРАФИК:



Ток трећег часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. Испитај ток и нацртај график функције $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Решење:

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $x^2-4\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm 2$

$D:(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција је парна $f(-x)=f(x)$

НУЛЕ И ЗНАК: $x^2-1=0$

$x=\pm 1$

$y<0 \quad x\in(-2,-4)\wedge x\in(1,2)$

$y>0 \quad x\in(-\infty,-2)\wedge x\in(1,2)\wedge x\in(2,+\infty)$

x^2-1	+	+	-	+	+
x^2-4	+	-	-	-	+
y	+	-	+	-	+
$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$

АСИМПТОТЕ:

$$\lim_{x\to -2-}\frac{x^2-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2-}\frac{3}{-4\cdot 0_-}=+\infty \qquad \lim_{x\to -2+}\frac{x^2-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2+}\frac{3}{-4\cdot 0_+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2-}\frac{3}{0_-\cdot 4}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2+}\frac{x^2-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2+}\frac{3}{0_+\cdot 4}=+\infty$$

Вертикалне асимптоте су праве $x=-2$ и $x=2$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{(x^2-4)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^3-4x}=0 \qquad n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4}\overset{:x^2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=1$$

Хоризонтална асимптота је права $y=1$.

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y'=\frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$y'=\frac{2x^3-8x-2x^2+2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}=0$$

$-6x=0 \qquad x=0$

$T_{\max}\left(0,\frac{1}{4}\right)$

$-6x$	+	+	-	-
$(x^2-4)^2$	+	+	+	+
$y`$	+	+	-	-
	↗	↗	↘	↘
$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$

Функција растућа за $x\in(-\infty,0)$, а опадајућа за $x\in(0,+\infty)$.

КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

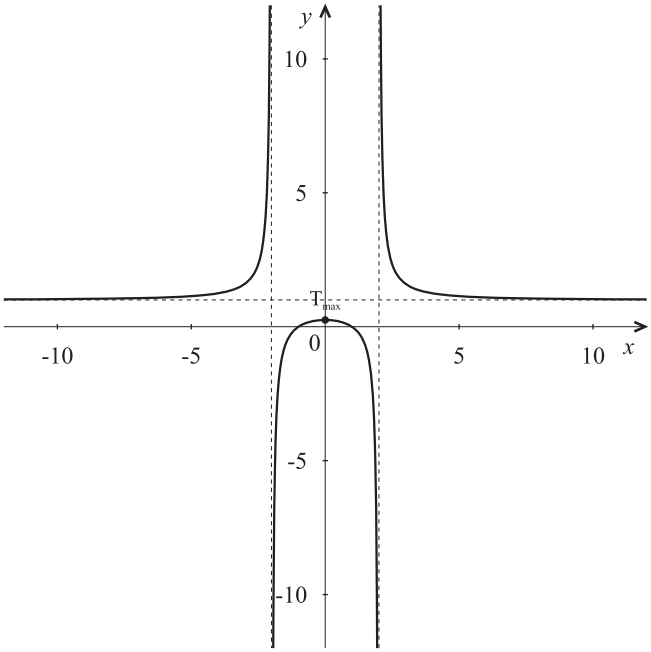
$$y''=\frac{-6\cdot(x^2-4)^2-(-6x)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=\frac{(x^2-4)\cdot(-6(x^2-4)+12x\cdot 2x)}{(x^2-4)^4}=\frac{18x^2+24}{(x^2-4)^3}\neq 0$$

$18x^2+24\neq 0$

Функција нема превојне тачке.

$18x^2+24$	+	+	+
$(x^2-4)^3$	+	-	+
y''	+	-	+
	$\cup$	$\cap$	$\cup$
$-\infty$	-2	2	$+\infty$

ГРАФИК:



Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Испитај ток и нацртај график функције $y=\dfrac{x^2-x+6}{x-2}$.

Решење:

(Наставник припремљену функцију приказује на следећем часу како би са ученицима извршио анализу домаћег задатка.)

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $x-2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 2$

$$D:(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК: Функција нема нуле:

$x^2-x+6\neq 0$

$y<0 \quad x\in(-\infty,2)$ $\qquad$ $y>0 \quad x\in(2,+\infty)$

x^2-x+6	+	+
$x-2$	-	+
y	-	+
$-\infty$	2	$+\infty$

АСИМПТОТЕ:

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2-x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{8}{0_-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2+}\frac{x^2-x+6}{x-2}=\lim_{x\to -2+}\frac{8}{0_+}=+\infty$$

Вертикалнае асимптота је права $x=2$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+6}{(x-2)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+6}{x^2-2x}=1 \qquad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+6}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+6}{x-2}\right)=1$$

Коса асимптота је права $y=x+1$.

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y'=\frac{(2x-1)\cdot(x-2)-(x^2-x+6)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-5x+2-x^2+x-6}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}=0$$

$x^2-4x-4=0 \qquad x_1=2-2\sqrt{2} \qquad x_2=2+2\sqrt{2}$

x^2-4x-4	+	-	-	+
$(x-2)^2$	+	+	+	+
$y`$	+	-	-	+
	↗	↘	↘	↗
$-\infty$	$2-2\sqrt{2}$	2	$2+2\sqrt{2}$	$+\infty$

Функција растућа за $x\in(-\infty,2-2\sqrt{2})\wedge x\in(2+2\sqrt{2},+\infty)$, а опадајућа за $x\in(2-2\sqrt{2},2)\wedge x\in(2,2+2\sqrt{2})$.

КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

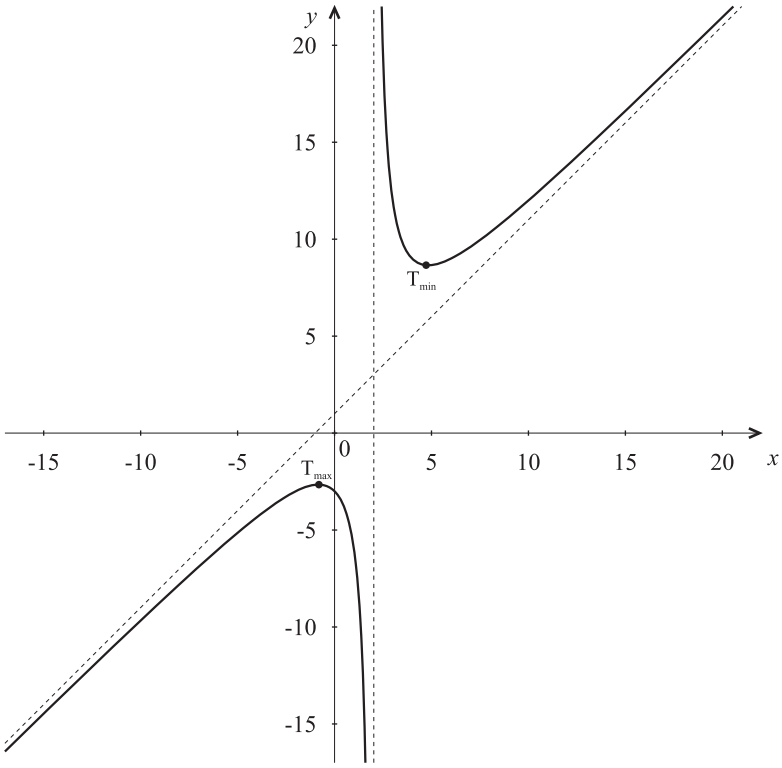
$$y''=\frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2-(x^2-4x-4)\cdot 2\cdot(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4}=\frac{(x-2)\cdot((2x-4)(x-2)-(x^2-4x-4)\cdot 2)}{(x-2)^4}$$

$$y''=\frac{16}{(x-2)^3}\neq 0$$

Функција нема превојне тачке.

$(x-2)^3$	-	+
y''	-	+
	∩	∪
$-\infty$	2	$+\infty$

ГРАФИК:



Ток четвртог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. Испитај ток и нацртај график функције $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

Решење:

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $x+1 \neq 0$, $x \neq -1$ $\quad D:(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК: Како је $e^x \neq 0$ за сваки реални број, функција нема нуле.

$y<0 \quad x\in(-\infty,-1)$

$y>0 \quad x\in(-1,+\infty)$

e^x	+	+
$x+1$	-	+
y	-	+
$-\infty$	-1	$+\infty$

АСИМПТОТЕ:

$$\lim_{x\to -1-}\frac{e^x}{x+1}=\lim_{x\to -1-}\frac{e^{-1}}{0_-}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1+}\frac{e^x}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{e^{-1}}{0_+}=+\infty$$

Вертикална асимптота је права $x = -1$.

$$k=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{(x+1)\cdot x}=\lim_{x\to -\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x^2+x}\right)=0$$

$$k=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{(x+1)\cdot x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2+x}\overset{LP}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x+1}$$

За $x\to -\infty$ хоризонтална асимптота је права

$$k\overset{LP}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$

$$n=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x+1}=\lim_{x\to -\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x}\right)=0$$

$y=0$.

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y'=\frac{e^x\cdot(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}=0$$

$x=0$

x	-	-	+
$(x+1)^2$	+	+	+
y`	-	-	+
	↘	↘	↗

$-\infty$ -1 0 $+\infty$

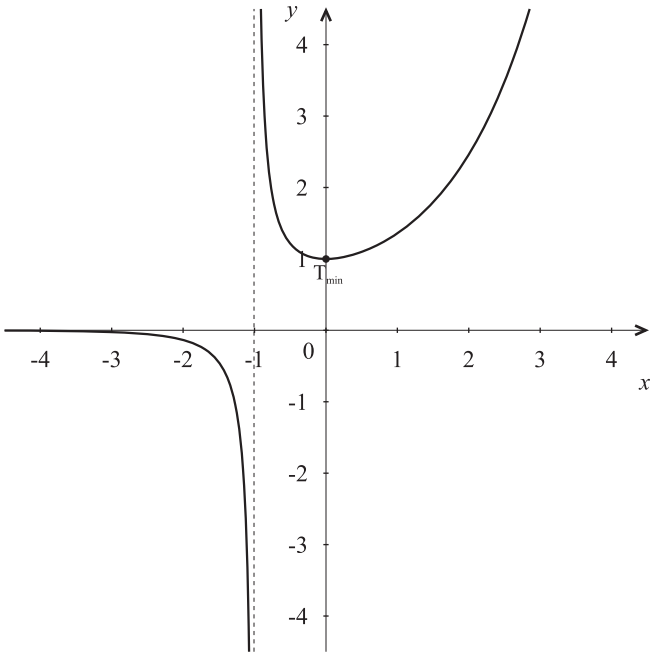
Функција опадајућа за $x\in(-\infty,-1)\wedge x\in(-1,0)$, а растућа за $x\in(0,+\infty)$.

КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$$y''=\frac{(e^x\cdot x+e^x)\cdot(x+1)^2-e^x\cdot x\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\cdot e^x\cdot\left((x+1)^2-2x\right)}{(x+1)^4}=\frac{e^x\cdot(x^2+1)}{(x+1)^3}\neq 0$$

Функција нема превојне тачке.

ГРАФИК:



x^2 1	+	+
x 1 ^{3}	-	+
y``	-	+
	∩	∪
$-\infty$	-1	∞

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Испитај ток и нацртај график функције $y = x \cdot e^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$

Решење:

(Наставник припремљену функцију приказује на следећем часу како би са ученицима извршио анализу домаћег задатка.)

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $D:(-\infty,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК: $x = 0$

$y < 0 \quad x \in (-\infty,0)$

$y > 0 \quad x \in (0,+\infty)$

e^x	+	+
x	-	+
y	-	+
$-\infty$	0	$+\infty$

АСИМПТОТЕ:

Вертикалне асимптоте нема.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x \cdot x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x \cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \qquad n = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{LP}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

За $x \to +\infty$ хоризонтална асимптота је права $y = 0$.

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y' = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = 0$$

$x = 1$

$1-x$	+	-
e^x	+	+
$y`$	+	-
	↗	↘
$-\infty$	1	$+\infty$

Функција растућа за $x \in (-\infty,0)$, а опадајућа за $x \in (0,+\infty)$.

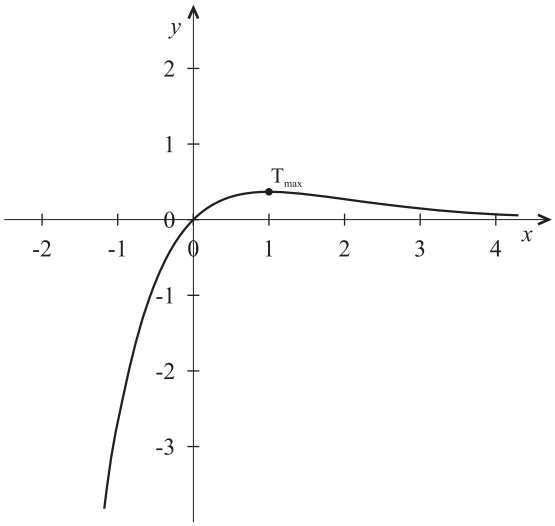
КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$$y'' = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(-1-1+x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x} = 0$$

$x = 2$

Превојна тачка је $P(2, \dfrac{2}{e^2}.)$

$x-2$	-	+
y''	-	+
	$\cap$	$\cup$
$-\infty$	2	$+\infty$



Ток петог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. (збирка, 223.е)) Испитај ток и нацртај график функције $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Решење:

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $D:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК:

$xe^{\frac{1}{x}} = 0$, нема нулу

$y < 0 \quad x \in (-\infty,0)$

$y > 0 \quad x \in (0,+\infty)$

$e^{\frac{1}{x}}$	+	+
x	-	+
y	-	+
$-\infty$	0	$+\infty$

АСИМПТОТЕ:

$$\lim_{x\to 0-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = +\infty$$

Вертикална асимптота за $x \to 0+$ је права $x = 0$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \overset{LP}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Коса асимптота је права $y = x + 1$

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y' = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\frac{x-1}{x} = 0$$

$$x = 1$$

$x-1$	-	-	+
x	-	+	+
$y`$	+	-	+
	↗	↘	↗

$-\infty \qquad 0 \qquad 1 \qquad +\infty$

Функција растућа за $x \in (-\infty, 0) \wedge x \in (1, +\infty)$, а опадајућа за $x \in (0,1)$.

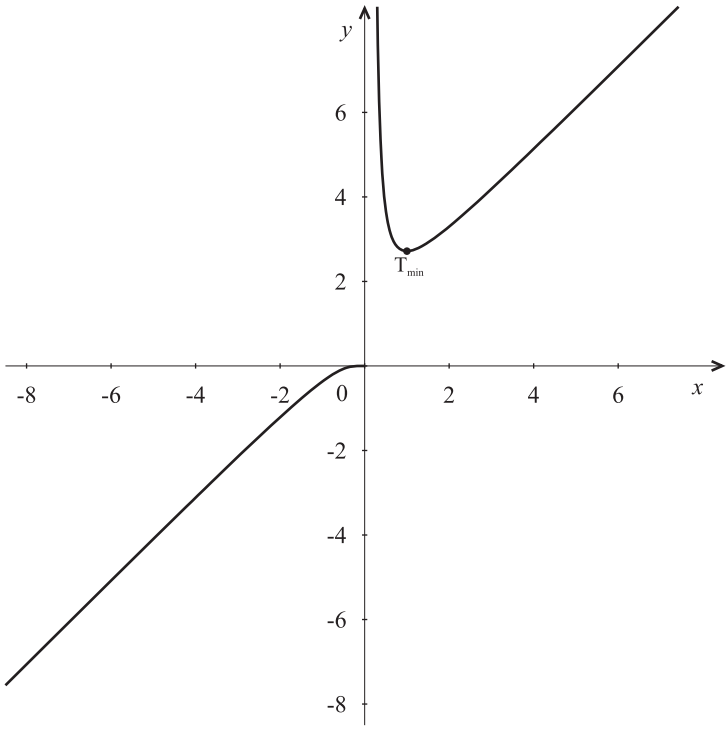
КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$$y'' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x-1}{x} + e^{\frac{1}{x}}\frac{x-(x-1)}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-x+1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^3} \neq 0$$

Функција нема превојне тачке.

x^3	-	+
y''	-	+
	∩	∪
$-\infty$	0	$+\infty$

ГРАФИК:



Завршни део часа: 5 мин.
Домаћи задатак из збирке: 223. д)

Ток шестог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. Испитај ток и нацртај график функције $y = \frac{1 - \ln x}{x}$

Решење:
ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $x > 0$ $D : (0, +\infty)$
ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна.

НУЛЕ И ЗНАК: $1-\ln x=0$

$\ln x=1$

$x=e$

$1-\ln x$	+	-
x	+	+
y	+	-
0	e	$+\infty$

$y>0 \quad x\in(0,e1)$

$y<0 \quad x\in(e,+\infty)$

АСИМПТОТЕ:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to 0+}(1-\ln x)\frac{1}{x}=+\infty$$

Вертикална асимптота слева је права $x=0$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}\overset{LP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x^2}=0 \qquad n=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x}\overset{LP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1}=0$$

Хоризонтална асимптота је права $y=0$.

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y'=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-(1-\ln x)}{x^2}=\frac{\ln x-2}{x^2}=0$$

$\ln x-2=0$

$x=e^2$

$\ln x-2$	-	+
x^2	+	+
$y`$	-	+
	↘	↗
0	e^2	$+\infty$

$$T_{\min}\left(e^2,-\frac{1}{e^2}\right)$$

Функција опадајућа за $x\in x\in(0,e^2)$, а растућа за $x\in(e^2,+\infty)$.

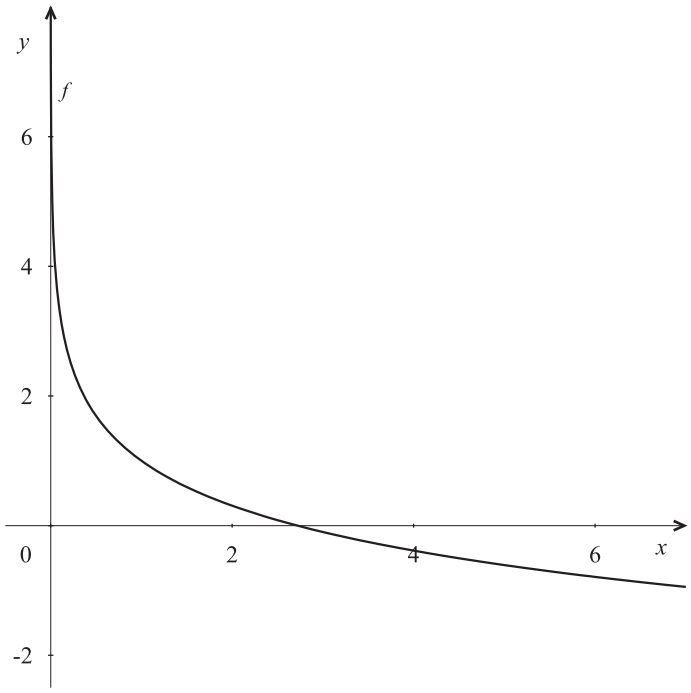
КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$$y''=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x-2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{5-2\ln x}{x^3}=0,\quad 5-2\ln x=0,\quad x=e^{\frac{5}{2}}$$

$$P\left(e^{\frac{5}{2}},-\frac{1}{2e^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$5-2\ln x$	+	-
x^3	+	+
y''	+	-
	∪	∩
0	$e^{\frac{5}{2}}$	$+\infty$

ГРАФИК:



Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Испитај ток и нацртај график функције $y = x\ln^2 x$

Решење:

(Наставник припремљену функцију приказује на следећем часу како би са ученицима извршио анализу домаћег задатка.)

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $x > 0$ $D:(0,+\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК:

$x\ln^2 x = 0$

$\ln x = 0$

$x = 1$

$\ln^2 x$	+	+
x	+	+
y	+	+
0	1	$+\infty$

$y > 0 \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

АСИМПТОТЕ:

$$\lim_{x\to 0+}\left(x\cdot\ln^2 x\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0$$

$$k = \lim_{x\to +\infty}\left(x\cdot\ln^2 x\right) = +\infty$$

Функција нема асимптоте.

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$y' = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x \cdot (\ln x + 2) = 0$

$\ln x = 0 \quad \vee \quad \ln x + 2 = 0$

$x = 1 \quad \vee \quad x = e^{-2}$

$\ln x$	-	+	+
$\ln x + 2$	-	-	+
$y`$	+	-	+
	↗	↘	↗

$0 \qquad e^{-2} \qquad 1 \qquad +\infty$

$T_{\min}(1,0) \qquad T_{\max}(e^{-2}, 4e^{-2})$ Функција опадајућа за $x \in (e^{-2}, 1)$, а растућа за $x \in (0, e^{-2}) \cup (1, +\infty)$.

КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$y'' = \frac{1}{x}(\ln x + 2) + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(\ln x + 1)}{x} = 0$

$2(\ln x + 1)$	-	+
x	+	+
y''	-	+
	∩	∪

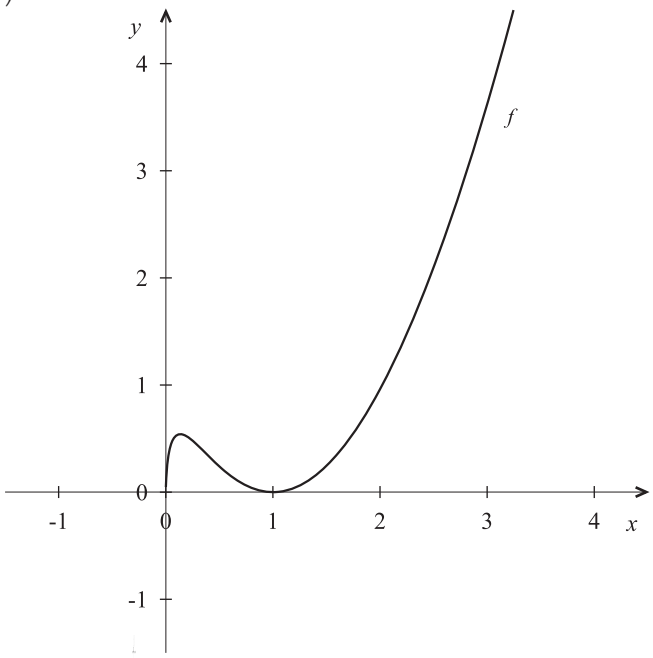
$0 \qquad e^{-1} \qquad +\infty$

$\ln x + 1 = 0$

$x = e^{-1}$

$P(e^{-1}, e^{-1})$

Г



Ток седмог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. Испитај ток и нацртај график функције $y = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$

Решење:

ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ: $D : (-\infty, +\infty)$

ПАРНОСТ (НЕПАРНОСТ): Функција није ни парна ни непарна

НУЛЕ И ЗНАК:

$\ln\left(x^2 - 2x + 2\right) = 0$

$x^2 - 2x + 2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = 1$

$y \geq 0 \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$	+	+
y	+	+
$-\infty$	1	$+\infty$

АСИМПТОТЕ:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) = +\infty$$

МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$y' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} = 0 \qquad x = 1$$

$2x - 2$	-	+
$x^2 - 2x + 2$	+	+
$y`$	-	+
	↘	↗

$-\infty \qquad 1 \qquad +\infty \qquad T_{\min}(1,0)$

Функција опадајућа за $x \in (-\infty, 1)$, а растућа за $x \in (1, +\infty)$.

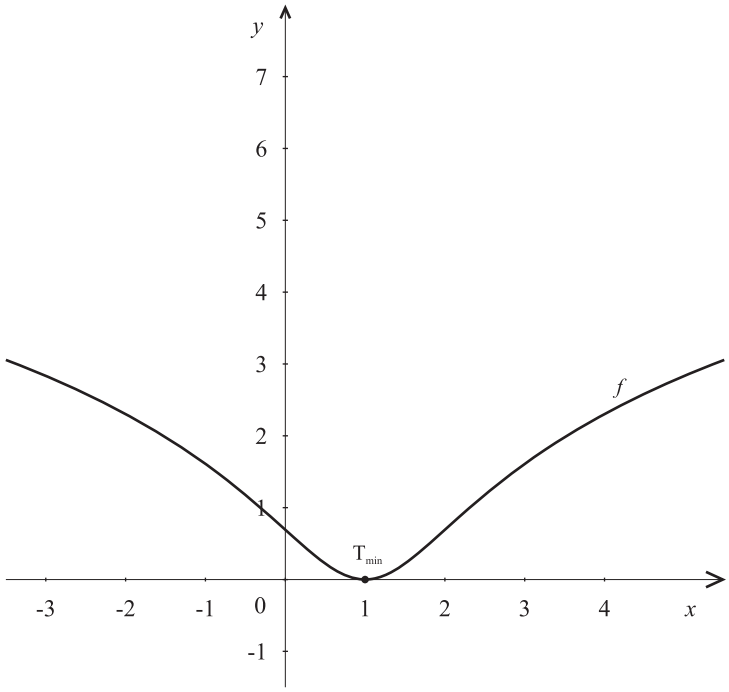
КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ:

$$y'' = \frac{2 \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) - (2x - 2) \cdot (2x - 2)}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2} = \frac{-2x^2 + 4x}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2} = 0, x = 0, x = 2$$

$P(0, \ln 2) \quad P(2, \ln 2)$

$-2x^2+4x$	-	+	-
$\left(x^2-2x+2\right)^2$	+	+	+
y''	-	+	-
	$\cap$	$\cup$	$\cap$

ГРАФИК:



Завршни део часа: 5 мин.

Подела радног материјала из области економских функција.
Домаћи задатак: Поновити функције понуде и тражње и равнотежу тржишта из предмета Основи економије.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Функција тражње и функција понуде.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни материјал, рачунар, пројектор, Геогебра
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену првог извода на испитивање економских функција
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Наставни материјали
Кључни појмови: функција тражње, функција понуде

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.
Економске појаве као што су тражња, понуда, приходи и трошкови међусобно зависе једна од других. Наведена зависност се приказује као функционална зависност између променљивих величина, а такве функције зовемо економске функције.

Главни део часа: 35 мин.

(Ученици наведене функције и дефиниције имају на радном материјалу који им је претходно умножен, а на часу наставник користи софтвер за интерактивну таблу или презентацију и припремљен материјал)

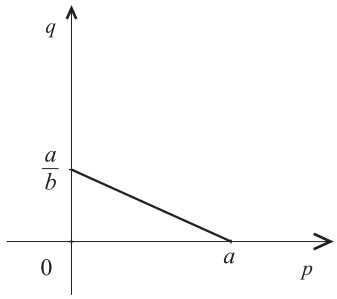
Функција тражње: За тражњу се најчешће користе симболи d (demand - тражња) и q (quantity demand – количина тражње). Најчешће се у разматрање узимају непознате: цена самог производа (p), цене које су са посматраним производом у уској вези (супститути, комплементи...), доходак потрошача, време. Функција тражње која показује зависност количине од наведених променљивих има облик $q = f(p, p_1, p_2, ..., k, t)$. Дефинисаћемо функцију тражње у ужем смислу $q = f(p)$, јер највећи утицај на промену тражње неког производа има његова цена. Што је већа цена неког производа то је мања потражња за њим: $q' < 0$.

Неки обици функција тражње су:

1) $q = \dfrac{a-p}{b}$ 2) $q = \dfrac{1}{ap+b}$ 3) $q = \dfrac{a-p^2}{b}$ 4) $q = ae^{-bp}$ $a,b,c \in R^+$

За економску анализу посматраћемо само први квадрант, тј. област у којој су цена и тражња ненегативне. Свакој од наведених функција одговара крива која опада у првом квадранту, а основна разлика међу њима је у томе што неке од њих опадају брже, а неке спорије, тј. неке криве су конвексне, а неке конкавне. Погледаћемо и анализирати графике за наведе функције:

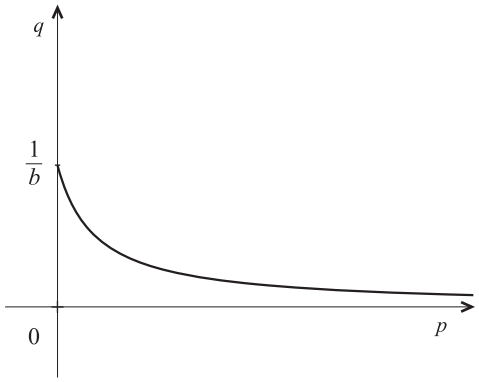
1. $q = \dfrac{a-p}{b}$ линеарна функција



$p \in [0, a]$

$q \in \left[0, \dfrac{a}{b}\right]$

2. $q = \dfrac{1}{ap+b}$ рационална фнкција која нема нуле.



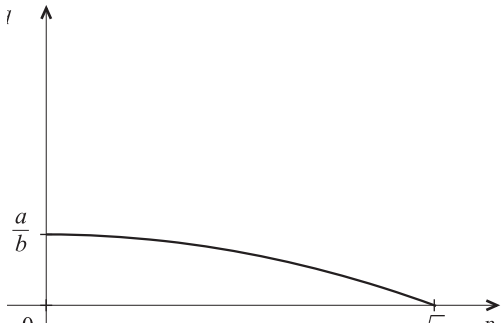
Хоризонтална асимптота је права q = 0,

а вертикална права $p = -\dfrac{b}{a}$

$q' = \dfrac{-a}{(ap+b)^2} < 0$ опадајућа функција

$p \in [0, +\infty)$ $q \in \left(0, \dfrac{1}{b}\right]$

3) $q = \dfrac{a-p^2}{b}$ квадратна функција чији је график парабола



Нуле функције су $\pm\sqrt{a}$

Максимум је у тачки $T\left(0, \dfrac{a}{b}\right)$

$p \in \left[0, \sqrt{a}\right]$

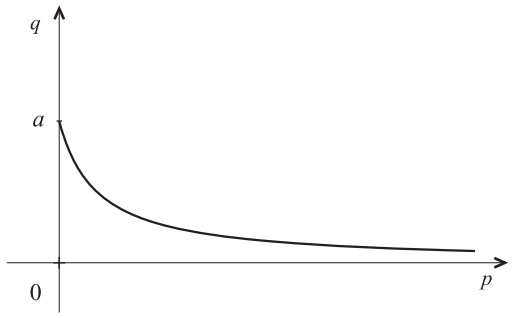
$q \in \left[0, \dfrac{a}{b}\right]$

4) $q = ae^{-bp}$ експоненцијална функција која нема нуле

$q' = -abe^{-bp} < 0$ опадајућа функција

$q'' = ab^2e^{-bp} > 0$ конвексна функција

$p \in [0,+\infty]$ $q \in (0,a]$



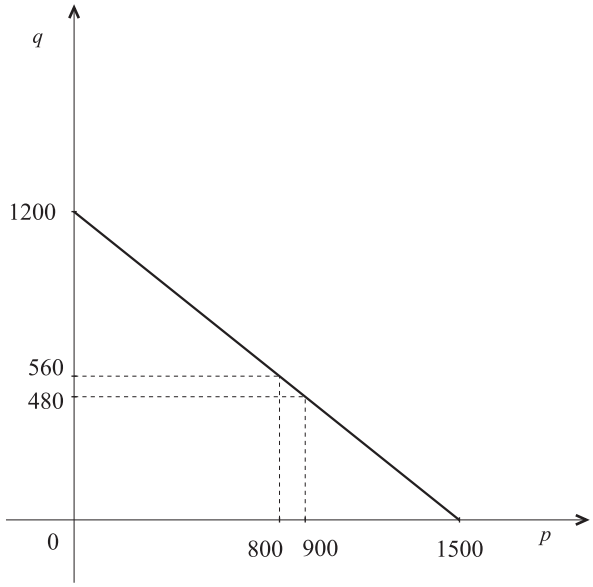
Пример 1: Дневна потражња за памучним мајицама дата је са $q_1 = -0{,}8p + 1200$, при чему је p цена у динарима.

а) Колико се максимално мајица дневно тражи?

б) Колико се прода мајица, ако је цена 800 динара?

в) Колико се дневно прода мајица, ако је цена 900 динара?

г) Графички приказати функцију тражње.



а) Коефицијент уз p је негативан број, те је тражња највећа када је $p = 0$, односно ако се мајице деле бесплатно.

б) $p = 800$ $q_1 = -0{,}8 \cdot 800 + 1200 = 560$

в) $p = 900$ $q_1 = -0{,}8 \cdot 900 + 1200 = 480$

(*Строго формално гледајући број 1200 би се могао интерпретирати као количина робе која се нуди бесплатно.)*

Функција понуде неког производа је количина тог производа која се износи на тржиште, а зависи од цене самог производа (p), трошкова производње тог производа, цена производа који су повезани са тим производом, организације тржишта... Дефинисаћемо функцију понуде у ужем смислу $q = f(p)$, јер највећи утицај на промену понуде неког производа има његова цена. Што је већа цена неког производа то је већа понуда истог: $q' > 0$.

Пример 2: Дневна понуда памучних мајица дата је са $q_2 = 1{,}5p + 500$, при чему је p цена у динарима.

а) Колика би била минимална понуда?

б) За колико се повећа понуда, ако се цена повиси за 500 динара?

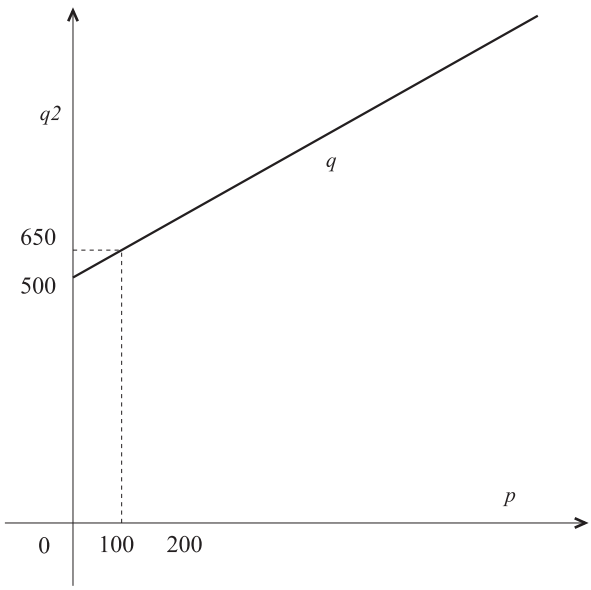
в) За колико треба повисити цену да би се продавало 30 мајица дневно више?

г) Графички приказати функцију понуде.

Решење:
а) Коефицијент уз p је позитиван број, те је понуда најмања када је $p = 0$, односно ако се мајице деле бесплатно. Дакле $q_2 = 500$.

б) $p = 100 \quad \Rightarrow \quad 1{,}5 \cdot 100 = 150$ комада

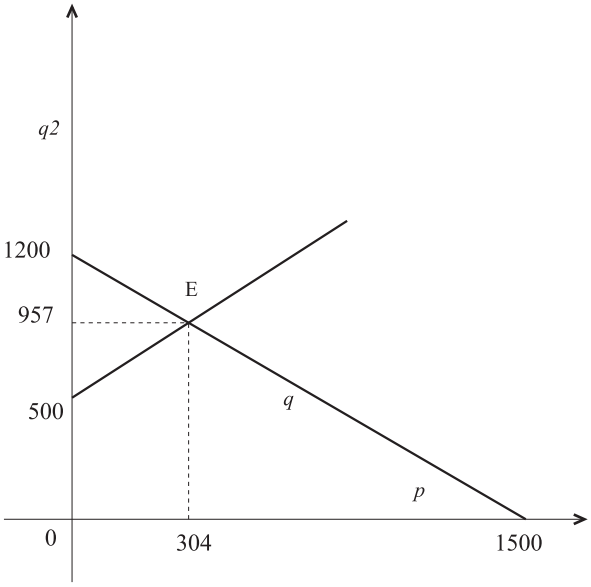
в) $1{,}5 \cdot p = 30 \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{30}{1{,}5} = 20$ динара



Тржишна равнотежа или еквилибријум настаје када је тражња неког производа једнака његовој понуди. Графички равнотежа тржишта је у пресеку функција понуде и тражње.

Пример 3: Одредити равнотежу за тржиште мајицама из претходних задатака и приказати графички.
Решење:

$$q_1 = q_2$$
$$-0{,}8p + 1200 = 1{,}5p + 500$$
$$p = 304{,}35 \qquad q = 956{,}52$$



Завршни део часа: 5 мин.
Домаћи задатак:

1. Дневна потражња за одређени производ дата је са $q_1 = -0{,}4p + 60$, а дневна понуда за исти производ дата је са $q_2 = 1{,}2p + 28$, при чему је p цена у динарима. Одредити равнотежу тржишта наведеног производа и илустровати графички.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Функција понуде и тражње.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни материјал, рачунар, пројектор, Геогебра
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену првог извода на испитивање економских функција
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Наставни материјали
Кључни појмови: равнотежа тржишта

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.
Поновити функције понуде и тражње.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци:

1. Нека је функција тражње за тржиште станова у центру Београда q=8000-3p , где је p цена по квадрату изражена у еврима. Ако цена по квадрату падне за 100 евра за колико ће порасти тражња?

Решење:
$$q_1 = 8000 - 3(p - 100)$$
$$q_1 = 8300 - 3p$$
Тражња ће бити већа за 300 станова.

2. Дата је функција $q = p^3 - 18p^2 + 81p$. Одредити за које интервале вредности цене и количине дата функција може бити функција тражње?

Решење: $D = (-\infty, \infty)$

Нуле:
$$p^3 - 18p^2 + 81p = 0$$
$$p \cdot (p^2 - 18p + 81) = 0$$
$$p = 0 \quad \vee \quad p^2 - 18p + 81 = 0$$
$$p = 0 \quad \vee \quad p = 9$$

Монотоност и екстремне вредности:

$$q' = 3p^2 - 36p + 81 = 0$$

$$p = 3 \quad \vee \quad p = 9$$

$6p^2 - 74p + 168$	+	-	+
$-\infty$	$\nearrow$ 3	$\searrow$ 9	$\nearrow$ ∞

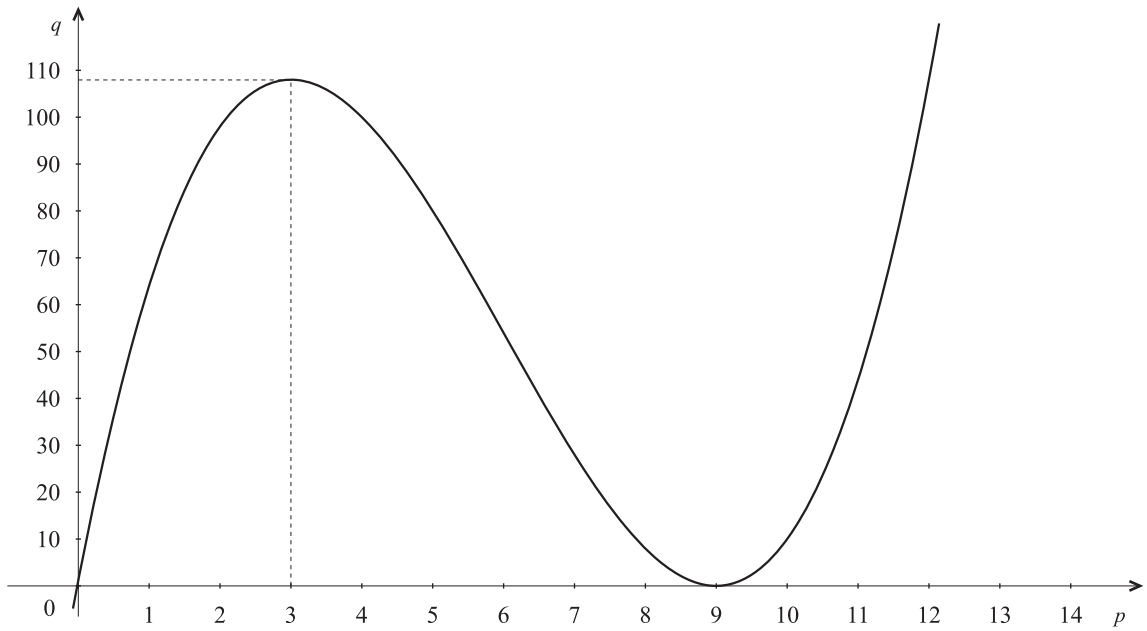
$T_{\max}(3{,}108) \quad T_{\min}(9{,}0)$

Конвексност и превојне тачке:

$q'' = 6p - 36 = 0$

$p = 6$

$6p - 36$	+	-
$-\infty$	$\cup$ 6	$\cap$ ∞



Задата функција је функција тражње у првом квадранту у интервалу у коме **опада**:

$$p \in [3{,}9]$$

$$q \in [0{,}108]$$

3. Дате су функције тражње $q_1 = \dfrac{16 - p^2}{2}$ и понуде $q_2 = p^2 + 2$.

а) Одредите количину и цену при којима се постиже равнотежа тржишта (еквилибријум)

б) Ако се понуда смањи за једну јединицу одредите нови еквилибријум.

Решење:

а)
$$q_1 = q_2$$
$$\frac{16-p^2}{2} = p^2 + 2$$

$$16 - p^2 = 2p^2 + 4$$
$$3p^2 = 12$$
$$p^2 = 4$$
$$p = 2$$

$q_1(2) = q_2(2) = 6$

Равнотежа тржишта се постиже за цену 2 нј. и количину 6.

б)
$$q_2' = q_2 - 1 = p^2 + 1$$
$$q_1 = q_2'$$
$$\frac{16-p^2}{2} = p^2 + 1$$

$$16 - p^2 = 2p^2 + 2$$
$$3p^2 = 14$$
$$p^2 = \frac{14}{3}$$
$$p \approx 2{,}16$$

$q_1(2{,}16) = q_2'(2{,}16) = 5{,}67$

Равнотежа тржишта се постиже за цену 2,16 нј. и количину 5,67.

4. Претпоставимо да су на савршеном тржишту неке државе функције тражње и понуде за неким производом $q_d = 100 - 2p$, $q_s = 3p - 56$, где је p цена. Ако је влада те државе одлучила да уведе субвенцију од 2 новчане јединице по јединици производа, колика треба да буде цена производа да би се остварила нова равнотежа тржишта?

Решење:

Субвенција значи да је награђен понуђач, односно да је цена понуђача већа:

$q_d = 100 - 2p$ $\qquad$ $q_s = 3(p+2) - 56 = 3p - 50$

Равнотежа тржишта или еквилибријум :
$$q_d = q_s$$
$$100 - 2p = 3p - 50$$
$$p = 30$$

5. Претпоставимо да су на савршеном тржишту неке државе функције тражње и понуде за неким производом $q_d = 100 - 2p$, $q_s = 3p - 31$, где је p цена. Ако је влада те државе одлучила да уведе порез од 12% по јединици производа за све потрошаче, колика треба да буде цена производа да би се остварила нова равнотежа тржишта?

Решење: *Порез иде на терет потрошача, односно цена тражње је увећана:*

$q_d = 100 - 2 \cdot 1{,}12 \cdot p = 100 - 2{,}24p$

Равнотежа тржишта или еквилибријум :
$$q_d = q_s$$
$$100 - 2{,}24p = 3p - 31$$
$$p = 25$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Одреди цену при којој се постиже равнотежа понуде и тражње, ако је функција тражње $q_1 = (p-3)^2$, а функција понуде $q_2 = 2p - 3$. Дати графички приказ.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Функција укупног прихода.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни материјал, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену првог извода на испитивање економских функција
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Наставни материјали
Кључни појмови: укупан приход

Уводни део часа: 5 мин.

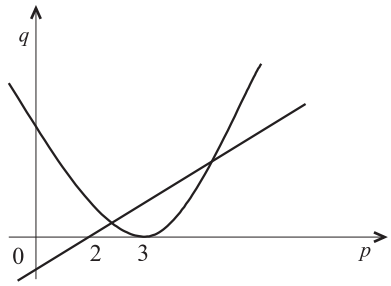
Анализа домаћег задатка. (наставник користи презентацију)

1. Одреди цену при којој се постиже равнотежа понуде и тражње, ако је функција тражње $q_1 = (p-3)^2$, а функција понуде $q_2 = 2p-3$.

$$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ q_1>0 \\ q_1'<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p>0 \\ (p-3)^2>0 \\ 2(p-3)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow p\in(0,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ q_2>0 \\ q_2'>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p>0 \\ 2p-3>0 \\ 2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow p\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$$

$$q_1 = q_2$$
$$(p-3)^2 = 2p-3$$
$$p^2-8p+12=0$$
$$p=2 \quad p\neq 6$$



Главни део часа: 35 мин.

Функција укупног прихода представља производ јединичне цене p и реализоване количине робе q: $P = q \cdot p$. Функција укупног прихода је дефинисана на истом интервалу као и функција тражње.
Први извод функције укупног прихода називамо функција граничног прихода P'.

Задаци:

1. Дата је функција тражње за неки производ у облику $q = -p + 32000$. Одредити количину и цену при којима ће укупан приход за овај производ бити максималан. Колико износи максималан приход?

Решење: $P = q \cdot p = -p^2 + 32000p$ $\quad P' = -2p + 32000 = 0$ $\quad p = 16\,000$, $q = 16\,000$, $P = 256\,000\,000$

2. Одредити количину и цену при којима се постиже максималан укупан приход и колико он износи ако је дата функција тражње:

Решење: $q = 8e^{-\frac{p}{8}+2}$ $\quad P = q \cdot p$, $P = 8p \cdot e^{-\frac{p}{8}+2}$ $\quad P' = e^{-\frac{p}{8}+2} \cdot (8 - p) = 0$, $p = 8 \quad q = 8e \quad P = 64e$

3. Дата је функција укупног прихода $P = -3p^2 + 48p$. Одредити:
а) функцију тражње
б) цену за коју ће укупан приход достићи максимум
в) максималан приход
Решење:

а) $P = q \cdot p$, $q = -3p + 48$ $\quad$ б) $P' = -6p + 48 = 0$, $p = 8$ $\quad$ в) $q = 24$, $P = q \cdot p$, $P = 192$

4. Дата је функција тражње $q = -2p + 20$.
а) Како повећање цене са нивоа p=1 утиче на укупан приход?
б) Како повећање тражње са нивоа q=12 утиче на укупан приход?
Решење:
а) $P = -2p^2 + 20p$ $\quad P' = -4p + 20$ $\quad P'(1) = -4 + 20 > 0$
што значи да укупан приход расте при повећању цене са нивоа p=1.
б) $p = 10 - \frac{q}{2}$ $\quad P = 10q - \frac{q^2}{2}$ $\quad P' = 10 - q$ $\quad P'(10) = 10 - 12 < 0$
што значи да се укупан приход смањује при повећању тражње са нивоа q = 12.

5. Агенција која изнајмљује аутомобиле (Rent a car) у једном граду има 62 аутомобила за изнајмљивање. Функција тражње за изнајмљивање аутомобила у том граду је

q = 140-2p, где је p цена. Власник агенције је одлучио да увећа број аутомобила. Колико возила треба да купи агенција да би имала највећи приход?

Решење:

$P = 140p - 2p^2$

$P' = 140 - 4p = 0$

$p = 35$

Максималан укупан приход се остварује ако је број возила $q = 70$

Агенција треба да купи 8 аутомобила да би остваривала највећи приход.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Одредити количину и цену при којима се постиже максималан укупан приход и колико он износи, ако је дата функција тражње: $q = -3p + 24$.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Функција укупних трошкова и функција добити.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни материјал, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену првог извода на испитивање економских функција
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Наставни материјали
Кључни појмови: укупан приход, укупни трошкови, гранични приход, гранични трошкови

Уводни део часа: 5 мин.

Поновити функције понуде, тражње, укупног прихода и њихове области дефинисаности.

Главни део часа: 35 мин.

Функција укупних трошкова или функција трошкова производње зависи од количине произведене робе q: $C = f(q)$. Функција C је позитивна растућа функција, односно важи:

$q > 0 \quad C > 0 \quad C' > 0$

Функција просечних трошкова производње или трошкова по јединици производа се означава са $\overline{C} = \dfrac{C}{q}$. Просечни трошкови производње показују кретање економичности у производњи.
Функција граничних (маргиналних) трошкова једнака је првом изводу функције укупних трошкова C'. Маргинални трошак у економији и финансијама представља промену укупног трошка до које долази са производњом додатне јединице производа.
Функција добити представља разлику између укупног прихода и укупних трошкова производње $D = P - C$

Под границом рентабилности за одређени производ подразумевамо интервал производње у коме је $D > 0$.
Максималну добит добијамо из услова: $D'(q) = 0$ и $D''(q) < 0$
односно $P'(q) - C'(q) = 0$ или $P'(q) = C'(q)$
Максимизација добити се остварује при обиму производње који је одређен тачком пресека криве граничних трошкова и криве граничних прихода.

Задаци:

1. Функција просечних трошкова је $\overline{C} = 50 - 8q + q^2$. Одредити обим производње за који су просечни трошкови минимални. Показати да су у тачки минимума просечних трошкова, просечни трошкови једнаки граничним трошковима.

Решење:
$$\overline{C}' = -8 + 2q = 0$$
$$q = 4$$
$$\overline{C}(q = 4) = 34$$

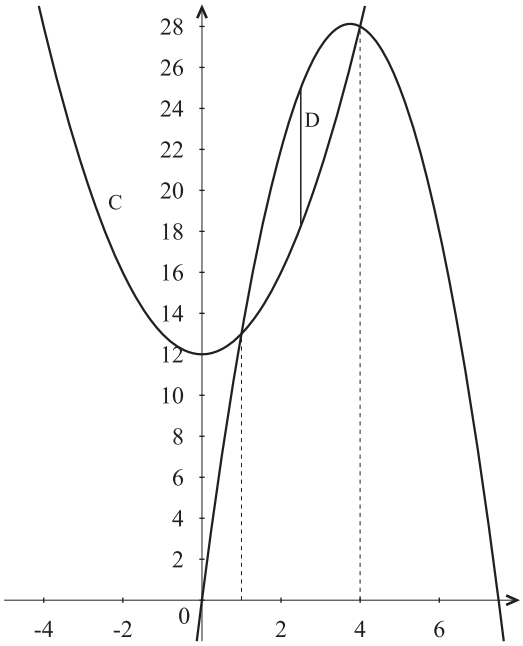
$$C = \overline{C} \cdot q$$
$$C = 50q - 8q^2 + q^3$$

$$C' = 50 - 16q + 3q^2$$
$$C'(q = 4) = 34$$

2. Дата је функција укупног прихода $P = -2q^2 + 15q$ и функција укупних трошкова $C = q^2 + 12$. Одреди горњу и доњу границу рентабилности, производњу за коју се остварује максимална добит, максималну добит. Графички приказати добит преко прихода и трошкова.

Решење:
$$P = C$$
$$-2q^2 + 15q = q^2 + 12$$
$$q_1 = 1 \qquad q_2 = 4$$
$$q \in (1,4)$$
$$D = P - C$$
$$D = -3q^2 + 15q - 12$$
$$D' = -6q + 15 = 0$$
$$q = 2{,}5$$

$$D_{\max} = D(q = 2{,}5) = 6{,}75$$



3. Дата је функција укупних трошкова $C = q^2 + 16$ и функција тражње $q = \dfrac{15 - p}{2}$.
Одредити добит за производњу при којој су просечни трошкови минимални и разлику те добити у односу на максималну добит.

Решење:

$\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{q^2+16}{q}$

$\overline{C}' = \frac{q^2-16}{q^2} = 0$

$q = 4$

$D(q=4) = 192$

$q = \frac{15-p}{2}$

$p = 15-2q$

$P = q \cdot p$

$P = 15q - 2q^2$

$D = P - C$

$D = -5q^2 + 112q - 432$

$D' = -10q + 112 = 0$

$q = 11{,}2$

$D(q=11{,}2) = 195{,}2$

4. Дата је функција просечног прихода $p = 4e^{-\frac{q}{2}+2}$ и функција просечних трошкова $\overline{C} = \frac{1200}{q}$. Одредити оптималну производњу и добит при тој производњи.

Решење:

$C = \overline{C} \cdot q$

$C = 1200$

$D = P - C$

$D = 4q \cdot e^{-\frac{q}{2}+2} - 1200$

$D' = 2e^{-\frac{q}{2}+2} \cdot (2-q) = 0$

$q = 2$

Оптимална производња се постиже за количину производа $q = 2$. Добит за производњу $q = 2$ је

$D(q=2) = 10e^5 - 1000$

Додатни задатак:

5. За један производ су дате функција укупних трошкова $C = \frac{1}{2}q^2 + 1250$ и функција тражње $q = -\frac{1}{4}p + 80$. Одредити добит за производњу при којој су просечни трошкови минимални и разлику те добити у односу на максималну добит.

Решење:

$\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{q^2+2500}{2q}$

$\overline{C}' = \frac{q^2-2500}{2q^2} = 0$

$q = 50$

$D(q=50) = 3500$

$q = -\frac{p}{4} + 80$

$4q = -p + 320$

$p = 320 - 4q$

$P = q \cdot p$

$P = 320q - 4q^2$

$D = P - C$

$D = -\frac{9}{2}q^2 + 320q - 1250$

$D' = -9q + 320 = 0$

$q = 35{,}56$

$D(q=35{,}56) = 4438{,}9$ max

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Функција укупних трошкова дата је у облику $C = 50000q - 300q^2 + q^3$. Одредити функцију граничних трошкова, функцију просечних трошкова, минимум просечних

трошкова. Показати да су за минимум просечних тошкова просечни трошкови једнаки граничним трошковима.

2. За један производ су дате функција укупних трошкова $C = q^2 + 12$ и функција тражње $p = -2q + 15$. Одредити интервал рентабилности производње, оптимални обим производње и максималну добит.

3. Дата је функција просечних трошкова $\overline{C} = q^2 - 6q + 20$. Показати да су за минимум просечних тошкова просечни трошкови једнаки граничним трошковима.

4. За један производ су дате функција просечних трошкова $\overline{C} = 3q + \frac{300}{q}$ и функција тражње $p = -2q + 100$. Одредити интервал рентабилности производње и оптимални обим производње.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Еластичност економских функција.
Тип часа: обрада и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни материјал, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за повезивање знања у јединствену целину.
Образовни задатак: Оспособљавање ученика за примену првог извода на испитивање економских функција
Васпитни задатак: Код ученика се развија свест о присуству математике у природним и друштвеним наукама, као и свест о важности примене раније стечених знања
Функционални задатак: Развијање способности за повезивање градива, систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.3.6. Разуме концепт извода функције и примењује га у проблемским ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Наставни материјали
Кључни појмови: еластичност функција

Ток првог часа:

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка (наставник користи презентацију)

1. Функција укупних трошкова дата је у облику $C = 50000q - 300q^2 + q^3$. Одредити функцију граничних трошкова, функцију просечних трошкова, минимум просечних трошкова. Показати да су за минимум просечних тошкова просечни трошкови једнаки граничним трошковима.
   Решење:
   $C' = 50000 - 600q + 3q^2$ $\quad \overline{C}' = -300 + 2q = 0$ $\quad \overline{C}(q = 150) = C'(q = 150)$
   $\overline{C} = 50000 - 300q + q^2$ $\quad q = 150$

2. За један производ су дате функција укупних трошкова $C = q^2 + 12$ и функција тражње $p = -2q + 15$. Одредити интервал рентабилности производње, оптимални обим производње и максималну добит.
   Решење:

$P = q \cdot p$
$P = -2q^2 + 15q$

$C = P$
$q^2 - 5q + 4 = 0$
$q \in (1,4)$

$D = P - C$
$D = -3q^2 + 15q - 12$
$D' = -6q + 15 = 0$
$q = 2{,}5$

$D(q = 2{,}5) = 6{,}75$

3. Дата је функција просечних трошкова $\overline{C} = q^2 - 6q + 20$. Показати да су за минимум просечних тошкова просечни трошкови једнаки граничним трошковима.
Решење:

$C = \overline{C} \cdot q$
$C = q^3 - 6q^2 + 20q$
$C' = 3q^2 - 12q + 20$

$\overline{C}' = -6 + 2q = 0$
$q = 3$

$\overline{C}(q = 3) = C'(q = 3)$

4. За један производ су дате функција просечних трошкова $\overline{C} = 3q + \dfrac{300}{q}$ и функција тражње $p = -2q + 100$. Одредити интервал рентабилности производње и оптимални обим производње.
Решење:

$P = q \cdot p$
$P = -2q^2 + 100q$

$C = P$
$-5q^2 + 100q - 300 = 0$
$q \in \left(3.68,\ \ 16.32\right)$

$D = P - C$
$D = -5q^2 + 100q - 300$
$D' = -10q + 100 = 0$
$q = 10$

Главни део часа: 35 мин.

Еластичност економских функција има велики значај у проучавању међусобних зависности економских величина као што су нпр: тражња и цена, производња и трошкови итд. Еластичност функције показује за колико се процената приближно мења вредност функције када се вредност независно променљиве са одређеног нивоа промени за један проценат. Вредност $E_{Y,x} = \dfrac{x}{y} y'$ је коефицијент еластичности.

1) Ако је $|E_{Y,x}| < 1$ функција у тачки x је нееластична и мења се за мање од 1%
2) Ако је $|E_{Y,x}| = 1$ функција има јединичну еластичност
3) Ако је $|E_{Y,x}| > 1$ функција у тачки x је еластична и мења се за више од 1%

Задаци:

1. Функција тражње је $q = 18 - 3p$. Испитати еластичност ове функције за цене $p = 2$ и $p = 4$.

Решење:

$$\left|E_{q,p}\right| = \left|\frac{p}{q}q'\right| = \left|\frac{-3p}{18-3p}\right|$$

$\left|E_{q,2}\right| = \frac{1}{2}$ За цену $p = 2$ тражња је нееластична (ако се цена повећа за 1% тражња ће опасти 0,5%)

$\left|E_{q,4}\right| = 2$ За цену $p = 4$ тражња је еластична (ако се цена повећа за 1% тражња ће опасти за 2%)

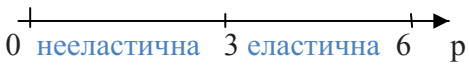
2. Функција тражње је $q = 1800 - 300p$. Одредити интервале у којима се може кретати цена тако да тражња буде нееластична.

Решење:

$$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ q>0 \\ q'<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} p>0 \\ 1800-300p>0 \\ -300<0 \end{array}\right\} p \in (0,6).$$

Закључујемо да вредност цене мора бити из интервала (0,6).

$$\left|E_{q,p}\right| = \left|\frac{p}{q}q'\right| = \left|\frac{-300p}{1800-300p}\right| = 1 \qquad p = 3$$



3. Функција тражње је $q = p^2 \cdot e^{-2p-2}$. Одредити цену за коју функција има јединичну еластичност

Решење:

$$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ q>0 \\ q'<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} p>0 \\ p^2 \cdot e^{-2p-2}>0 \\ 2p \cdot e^{-2p-2}(1-p)<0 \end{array}\right\} \quad p \in (1,+\infty)$$

$$\left|E_{q,p}\right| = \left|\frac{p}{q}q'\right| = \left|\frac{2pe^{-2p-2}(1-p)}{pe^{-2p-2}}\right| = \left|2(1-p)\right| = 1 \qquad p = 1{,}5$$

4. Функција тражње је $q \cdot p^8 = 64$. Показати да је еластичност ове функције константна.

Решење:

$$\left|E_{q,p}\right| = \left|\frac{p}{q}q'\right| = 8$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Функција тражње је $q = 64 - \frac{p}{8}$. Одредити интервале у којима се може кретати цена тако да тражња буде нееластична.
2. Функција тражње је $q = 8p \cdot e^{-\frac{p}{2}+4}$. Одредити интервале у којима се може кретати цена тако да тражња буде нееластична.

Ток другог часа:

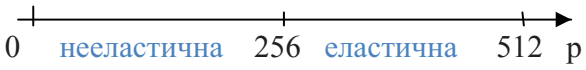
Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка (наставник користи презентацију)

1. Функција тражње је $q = 64 - \frac{p}{8}$. Одредити интервале у којима се може кретати цена тако да тражња буде нееластична.
   Решење:

$$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ q>0 \\ q'<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p>0 \\ 64-\frac{p}{8}>0 \\ -\frac{1}{8}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow p \in (0,512)$$

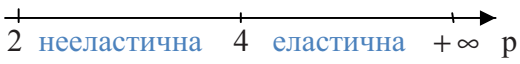
$$\left|E_{q,p}\right| = \left|\frac{p}{q}q'\right| = \left|\frac{-p}{512-p}\right| = 1,\ p = 256$$



2. Функција тражње је $q = 8p \cdot e^{-\frac{p}{2}+4}$. Одредити интервале у којима се може кретати цена тако да тражња буде нееластична.
   Решење:

$$\left.\begin{array}{l} p>0 \\ q>0 \\ q'<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p>0 \\ 8pe^{-\frac{p}{2}+4}>0 \\ 8e^{-\frac{p}{2}+4}\left(1-\frac{p}{2}\right)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow p \in (2,+\infty)$$

$$\left|E_{q,p}\right| = \left|\frac{p}{q}q'\right| = \left|1-\frac{p}{2}\right| = 1,\ p=4$$



Главни део часа: 35 мин.

Задаци:

1. Функција тражње је $q = 12 - 4p$. Испитати еластичност функције прихода у односу на цену. Показати како се приход мења при повећању цене са нивоа $p = 1$.

Решење:

$$P = p \cdot q = 12p - 4p^2 \qquad P' = 12 - 8p \qquad \left|E_{P,p}\right| = \left|\frac{p}{P}P'\right| = \left|\frac{12-8p}{12-4p}\right|$$

$\left|E_{P,\frac{1}{3}}\right| = \frac{1}{2} < 1$ функција за $p = 1$ је нееластична (при повећању цене за 1% са нивоа $p = 1$ укупан приход се повећава за 0,5%).

2. Дата је функција укупних трошкова $C = q^3 - 5q^2 + 6q$. Испитати еластичност ове функције за $q = 1,\ q = \frac{5}{2},\ q = 4$.

Решење: $E_{C,q} = \frac{q}{C}C' = \frac{3q^2 - 10q + 6}{q^2 - 5q + 6}$

$E_{C,1} = \frac{1}{2} < 1$ При повећању производње са нивоа $q = 1$ просечни трошкови се смањују.

$E_{C,\frac{5}{2}} = 1$ Просечни трошкови се не мењају

$E_{C,4} = 7 > 1$ При повећању производње са нивоа $q = 3$ просечни трошкови се повећавају.

3. Одреди производњу при јединичној еластичности функције укупних трошкова $C = 20(1+q)^{1,5}$

Решење:

$$C' = 30(1+q)^{0,5} \qquad E_{C,q} = \frac{q}{C}C' = \frac{q}{20(1+q)^{1,5}}30(1+q)^{0,5} = \frac{3q}{2(1+q)} = 1,\ q = 2$$

4. Дата је функција укупних трошкова $C = 10e^{\frac{q}{2}}$. Испитати еластичност ове функције за $q = 1$.

Решење: $E_{C,q} = \frac{q}{C}C' = \frac{q}{2}$

$E_{C,3} = \frac{1}{2} < 1$ При повећању производње са нивоа $q = 1$, просечни трошкови се смањују.

5. Дата је функција укупних трошкова $C=\sqrt{q^2+5q-2}$. Испитати еластичност ове функције за $q=2$.

Решење: $E_{C,q}=\frac{q}{C}C'=\frac{2q^2+5q}{2\left(q^2+5q-2\right)}$

$E_{C,3}=\frac{3}{4}<1$ При повећању производње са нивоа $q=2$, просечни трошкови се смањују.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак:

1. Дата је функција укупних трошкова $C=2q^3-8q^2+q$. Испитати еластичност ове функције за $q=1$.

4. Комбинаторика и вероватноћа

Основна правила комбинаторике. Варијације, пермутације, комбинације без понављања. Случајни догађаји. Вероватноћа. Условна вероватноћа и независност. Случајне променљиве. Биномна и нормална расподела. Средња вредност и дисперзија.
Популација, обележје и узорак. Основни задаци математичке статистике. Прикупљање, сређивање, графичко приказивање и нумеричка обрада података.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Увод у комбинаторику. Правило збира и правило производа.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Понављање правила збира и производа
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: кардинални број

Уводни део часа: 5 мин.

Комбинаторика (lat.combinare) је област математике која изучава могуће распореде датих елемената и начине њиховог груписања. По правилу нас занима да ли је одређени распоред могућ и ако јесте на колико начина се може формирати.

Главни део часа: 35 мин.

Дефиниција: Број елемената неког скупа *A* зовемо кардинални број скупа и означавамо са *c(A).*
Нека су $a_1, a_2, ..., a_m$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ међусобно различити елементи и нека су $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Скуп А има *m*, а скуп В *n* елемената што краће пишемо: $c(A) = m$, $c(B) = n$.

- Ако су скупови *A* и *B* дисјунктни, тј. немају заједничких елемената, тада је $A \cup B = \{a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n\}$ и сви елементи скупа $A \cup B$ су међусобно различити. Стога скуп $A \cup B$ има *m+n* елемената, тј. $c(A \cup B) = m + n$. Другим речима у овом случају важи једнакост: $c(A \cup B) = c(A) + c(B)$. Наведену једнакост зовемо принцип збира.
- Ако скупови *A* и *B* имају *p* заједничких елемената, тада скуп $A \cup B$ има *m+n-p* елемената, тј. $c(A \cup B) = m + n - p$. Другим речима у овом случају важи једнакост: $c(A \cup B) = c(A) + c(B) - c(A \cap B)$.
- $A \times B = \left\{ (a,b) \middle| \ a \in A \wedge b \in B \right\}$ $c(AxB) = c(A) \cdot c(B)$ зовемо принцип производа.

Задаци

1. Бацамо две коцкице за игру. На колико начина се може добити збир 7 или 11?

   Решење:
   Нека скуп *A* чин број начина да се добије збир 7, $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, а скуп *B* број начина да се добије збир 11 на један од следећих начина: $B = \{(6,5), (5,6)\}$. Директним пребројавањем можемо видети да се број 7 може добити на 6, а број 11 на два начина. Односно *c(A)=6*, *c(B)=2*. Стога се 7 или 11 може добити на 8 начина, односно $c(A \cup B) = 8$.

2. У кутији се налази 100 листића на којима су редом исписани бројеви од 1 до 100. Извлачимо 1 листић. На колико начина се може извући листић на коме је број дељив са 7 или са 15 или са 23?

   Решење:
   Скуп *A* садржи листиће на којима су бројеви: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, скуп *B* листиће на којима су бројеви: 15, 30, 45, 60, 75 ,90, а скуп С листиће на којима су бројеви: 23, 46, 69, 92.
   Директним пребројавањем налазимо: *c(A)=14, c(B)=6, c(C)=4.* Како су скупови *A*, *B* и *C* дисјунктни закључујемо: $c(A \cup B \cup C) = c(A) + c(B) + c(C) = 20$.

3. Бацамо коцку за игру. На колико начина ће коцкица показати број дељив са 2 или са 3?

   Решење:

   Нека скуп A чине бројеви дељиви са 2, а скуп B бројеви дељиви са 3.

   $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$, $A\cap B=\{6\}$, c(A)=3, c(B)=2, $c(A\cap B)=1$.

   $$c(A\cup B)=c(A)+c(B)-c(A\cap B)=3+2-1=4$$

4. Од места P до места Q воде два различита пута, а од места Q до места R воде три различита пута. Колико различитих путева води од места P до места R?

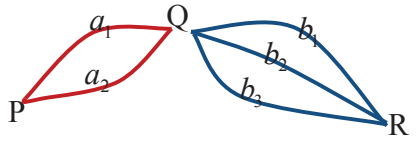
   Решење:

   $A=\{a_1,a_2\}$ $\quad B=\{b_1,b_2,b_3\}$

   (a_1,b_1), (a_1,b_2), (a_1,b_3),

   (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_2,b_3)

   $c(AxB)=c(A)\cdot c(B)=2\cdot 3=6$.



Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 425, 428.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Пермутације без понављања.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појма пермутација
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.3.4.1. Решава сложеније комбинаторне проблеме.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: пермутација

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Понављање правила збира и производа.

Главни део часа: 35 мин.

Дефиниција: Факторијел неког природног броја је производ свих природних бројева који су мањи или једнаки од њега. Факторијел природног броја n означавамо са $n!$ и рачунамо на следећи начин: $\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$

Посебно се дефинише: $\boxed{0! = 1}$

Факторијел има особину: $\boxed{n! = n(n-1)!}$

Пример 1: $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ $\qquad$ $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4!$

1. (Збирка, 438 б) Израчунати: $8!\left(\frac{5!}{7!}-\frac{8!}{9!}\right)-7!\left(\frac{3!}{6!}-\frac{7!}{9!}\right)$

2. (Збирка, 439) Решити једначине $(x \in N)$: $\frac{(x+2)!}{(x-1)!} = 120$

Пример 2: Ако је дат скуп слова $\{A, K, T\}$, одреди колико има различитих распореда елемената наведеног скупа?

Решење: *АКТ, АТК, КТА, КАТ, ТАК, ТКА*

Напомена: Наведени пример се лако решава набрајањем распореда. Ако скуп има више елемената набрајање постаје непрактично.

Пример 3: Треба распоредити 8 књига на полици. Колико има различитих распореда тих књига?

Решење: Прву књигу од посматраних можемо поставити на осам позиција, другу на седам, трећу на шест итд. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$.

Дакле број свих распореда наведених књига је $8! = 40320$

Дефиниција: Укупан број распореда n различитих елемената неког скупа се назива пермутација без понављања датог скупа.

Теорема: Број пермутација скупа A од n елемената једнак је $\boxed{P(n) = n!}$

Напомена: Оно што је важно уочити када је реч о пермутацијама јесте да у пермутацији учествују сви елементи посматраног скупа и да различит поредак елемената представља различиту пермутацију.

3. Написати све пермутације скупа $\{A, E, П, P\}$. Која је по реду пермутација *ПЕРА*, а која *РЕПА* ?

   Решење:Укупан број пермутација скупа од 4 елемента је $P(4) = 4! = 24$

АЕПР	1	*ЕАПР*	7	*ПАЕР*	13	*РАЕП*	19
АЕРП	2	*ЕАРП*	8	*ПАРЕ*	14	*РАПЕ*	20
АПЕР	3	*ЕПАР*	9	*ПЕАР*	15	*РЕАП*	21
АПРЕ	4	*ЕПРА*	10	***ПЕРА***	**16**	***РЕПА***	**22**
АРЕП	5	*ЕРАП*	11	*ПРАЕ*	17	*РПАЕ*	23
АРПЕ	6	*ЕРПА*	12	*ПРЕА*	18	*РПЕА*	24

Која је по реду пермутација реч *ДУНАВ* од слова *АВДНУ*?

Решење: Укупан број пермутација скупа од 5 елемената је $P(5) = 5! = 120$

Са *А* почиње $4! = 24$ пермутације

Са *В* почиње $4! = 24$ пермутације

Са *ДА* почиње $3! = 6$ пермутација

Са *ДВ* почиње $3! = 6$ пермутација

Са *ДН* почиње $3! = 6$ пермутација

Са *ДУА* почиње $2! = 2$ пермутације

Са *ДУВ* почиње $2! = 2$ пермутације

ДУНАВ је дакле 71 пермутација.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 438. а), 439. а, б), 442.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Варијације без понављања.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појма варијација
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: варијација

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Пример 1: Ако је дат скуп слова $\{A, K, T\}$, одреди колико се речи дужине два може формирати коришћењем слова из датог скупа, ако се слова у речи не понављају?
Решење: *АК, АТ, КА, КТ, ТА, ТК*

Пример 2: У одељењу има 30 ученика. На колико начина може 6 ученика седети у првој клупи?
Решење: На прво место од понуђених шест можемо вршити избор од 30 ученика, на друго од 29, на треће од 28 итд. Дакле: $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 427518000$.

Дефиниција: Укупан број распореда k различитих елемената неког скупа који има n различитих елемената $(n \geq k)$ се назива варијација без понављања датог скупа.

Теорема: Нека је $k \le n,\ \ k \in N_0, n \in N$. Број варијација без понављања $k-$те класе од $n-$елемената скупа A једнак је $\boxed{V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Напомена: Оно што је важно уочити када је реч о варијацијама јесте да у варијацији не учествују сви елементи посматраног скупа и да различит поредак елемената представља различиту варијацију.

Задаци

1. (Збирка, задатак 469) Број варијација без понављања друге класе од n елемената је 380. Наћи n.
   Решење: $V_n^2 = n(n-1) = 380 \qquad n = 20$
2. Колико има троцифрених бројева од цифара 1,2,3,4,5 чије су цифре различите?
   Решење: $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
3. Колико различитих шифара дужине три за отварање кофера постоји, ако се зна да су цифре у шифри међусобно различите?
   Решење: $V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
4. Колико има троцифрених бројева чије су цифре различите?
   Решење: $V_{10}^3 - V_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648$
5. Један студент треба да положи четири испита за 10 дана. На колико начина то може учинити ако се зна да последњи испит полаже десетог дана?
   Решење: $V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
6. Колико има четвороцифрених бројева чије су цифре различите и који су дељиви са 5?
   Решење: Разликујемо две класе оваквих бројева, оне који се завршавају са 0 и оне који се завршавају са 5. Дакле, $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 = 952$
7. Одељење броји 30 ученика. Они су након сликања за матурантски албум међусобно разменили фотографије. Колико је укупно подељено фотографија?
   Решење: $V_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 470, 471, 472, 473.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Пермутације и варијације без понављања.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Утврђивање појмова пермутације и варијације
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.3.4.1. Решава сложеније комбинаторне проблеме.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: варијација, пермутација

Уводни део часа: 10 мин.

Анализа домаћег задатка.
Поновити кроз одговарајуће моделе да је суштина пермутације и варијације у редоследу елемената. Ученицима поделити наставне материјале на којима се налазе текстови задатака са пријемних испита.

Главни део часа: 30 мин.

1. (ФОН, 2012.) Колики је број десетоцифрених бројева чије су све цифре међусобно различите и који су дељиви са 5?
   Решење: Разликујемо две класе оваквих бројева, оне који се завршавају са 0 и оне који се завршавају са 5.
   $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1+8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot (9+8)=8!\cdot 17$

2. (ФОН, 2013.) Колики је број свих пермутација слова речи *МУЗИКА* код којих се на последња три места налази бар један сугласник?
   Решење: Број свих пермутација слова речи *МУЗИКА* је $6! = 720$
   Број пермутација код којих на последња три места нема сугласника је $3! \cdot 3! = 36$
   Број свих пермутација код којих се на последња три места налази бар један сугласник 720-36=684.

3. *(ФОН, 2014.) Колики је број свих петоцифрених бројева дељивих са 5, који имају тачно једну непарну цифру?
   Решење: Број свих петоцифрених бројева који се завршавају бројем нула и имају тачно једну непарну цифру, непарна цифра може бити на првом, другом, трећем или четвртом месту, дакле $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$
   Број свих петоцифрених бројева који се завршавају бројем 5 и имају остале четири цифре парне: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$
   Број свих петоцифрених бројева дељивих са 5, који имају тачно једну непарну цифру 2500+500=3000.

4. (ФОН, 2016.) Колики је број свих пермутација слова речи *МОСКВА* код којих се између два самогласника налази бар један сугласник?
   Решење: Број свих пермутација слова речи *МОСКВА* је $6! = 720$
   Број пермутација слова речи МОСКВА код којих два самогласника *АО* стоје један поред другог, као *АО* или *ОА*, и као пар имају пет могућих позиција, а преостала 4 слова се произвољно распоређују $2 \cdot 5 \cdot 4! = 240$
   Број свих пермутација слова речи *МОСКВА* код којих се између два самогласника налази бар један сугласник је 720-240=480.

5. (САО, 2016) Колико има четвороцифрених природних бројева који су дељиви са 2, а нису са 5, а чије су све цифре различите и припадају скупу $\{0,1,2,4,5,6\}$?
   Решење: Према наведеном критеријуму закључујемо да се последња цифра четвороцифреног броја може бирати на три начина, односно из скупа $\{2,4,6\}$
   Прва цифра се бира на 4 начина јер не може бити 0 нити једнака последњој цифри.
   Друга цифра се бира на 4 начина, јер мора бити различита од прве и четврте.
   Трећа цифра се бира на 3 начина јер су три броја преостала. Дакле:
   $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 443, 446, 451.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Комбинације без понављања.
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појма комбинација
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: комбинација

Уводни део часа: 10 мин.

Анализа домаћег задатка.

Пример: На колико начина је могуће изабрати 2 особе од 5 кандидата?
Решење: Нека се врши избор између особа *А,Б,Ц,Д,Е*
Могуће је правити групе на следећи начин: *АБ, АЦ, АД, АЕ, БЦ, БД, БЕ, ЦД, ЦЕ, ДЕ*.
Дакле имамо 10 комбинација група.

У случају када пребројавамо скуп код кога поредак изабраних елемената није битан кажемо да су у питању **комбинације**.

Главни део часа: 30 мин.

Дефиниција: Биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ (чита се „n над k“), $n \in N, k \in N_0$ и рачуна по формули:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Дефиниција: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

Пример: Израчунати $\binom{6}{4}$.

Решење: $\binom{6}{4}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=15$

Дефиниција: Комбинације $k-$те класе елемената скупа A који има n елемената представљају сви подскупови скупа A од k елемената.

Теорема: Број комбинација $k-$те класе од n елемената једнак је $C_n^k=\binom{n}{k}$ $n\geq k$.

Задаци

1. На колико начина се од 52 карте може изабрати 4 карте?

   Решење: $\binom{52}{4}=\frac{52\cdot51\cdot50\cdot49}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=270725$

2. (Збирка, задатак 496) У игри *ЛОТО* извлачи се 7 од 39 бројева. На колико начина је могуће извући добитну комбинацију?

   Решење: $\binom{39}{7}=\frac{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35\cdot34\cdot33}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=15380937$

3. Од 10 учесника музичког фестивала троје ће бити награђено. На колико начина је могуће извршити избор?

   Решење: $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$

4. Од 120 испитних питања студент извлачи три питања. Колико различитих цедуља је могуће направити?

   Решење: $\binom{120}{3}=\frac{120\cdot119\cdot118}{3\cdot2\cdot1}=280840$

5. На колико начина се од 52 карте може изабрати 4 карате тако да буде тачно један кец?

   Решење: $\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{3}=4\cdot\frac{48\cdot47\cdot46}{3\cdot2\cdot1}=69184$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 489, 492, 493.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Комбинације без понављања.
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Утврђивање појма комбинација
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.3.4.1. Решава сложеније комбинаторне проблеме.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: варијација

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1. На колико начина се од 52 карте може изабрати 4 карте тако да међу њима буде бар један кец?

   Решење: Четири карте можемо изабрати на $\binom{52}{4}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=270725$ начина.

   Четири карте међу којима нема ниједан кец можемо изабрати на $\binom{48}{4}=\frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=194580$ начина. Четири карте међу којима је бар један кец можемо изабрати на 270725-194580=76145 начина.

2. (ФОН, 2015.) Колики је број свих пермутација слова речи *ЗЛАТИБОР* које почињу и завршавају се самогласником ?
   Решење: Три смогласника *А, И, О* можемо распоредити на прво и последње место на 6 начина *АИ, АО, ИА, ИО, ОА, ОИ*, а преосталих 6 слова распоређујемо на 6! начина $6 \cdot 6! = 4320$

3. На колико начина се може од три математичара и пет физичара формирати тим од 5 чланова у којем ће бити бар два математичара.
   Решење: $\binom{3}{2}\binom{5}{3}+\binom{3}{3}\binom{5}{2}=40$

4. (Збирка, задатак 498) Од осам ученика треба саставити кошаркашки тим од пет чланова тако да се од два највиша ученика бира један центар, а од преосталих шест ученика, бирају се два бека, а затим још два крила. На колико начина се може саставити тим?
   Решење: $\binom{2}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{2}=180$

5. (Збирка, задатак 500. а) Решити једначине $x \in N$: $\binom{x+1}{2} : \binom{x}{3} = 4:5$

6. (Збирка, задатак 501. а) Решити једначине $x \in N$: $V_{x+1}^{3} + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 494, 495, 500. б, в), 501. б, в)

Редни број часа _____

Наставна јединица: Случајни догађаји
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појмова који се односе на увод у вероватноћу
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: случајни догађаји

Уводни део часа: 10 мин.

Посматрајмо експеримент:

Коцка за игру се баци и на горњој страни се појављује неки од бројева 1,2,3,4,5,6.

Појављивање једног од тих бројева називамо елементарни догађај. Дакле, можемо имати шест елементарних догађаја A_1 - коцка показује број 1, A_2 - коцка показује број 2, итд.

Догађај „коцка показује паран број“ се може приказати преко три елементарна догађаја A_2, A_4, A_6, што значи да овај догађај није елементаран.

Догађаји које смо посматрали могу али не морају да се остваре и зато их називамо случајним догађајима.

Сваком експерименту можемо придружити скуп Ω свих могућих исхода тог експеримента. Тај скуп зовемо простор елементарних догађаја, а његове елементе елементарни догађаји.

Главни део часа: 30 мин.

1. Навести простор елементарних догађаја и одредити кардинални број простора елементарних догађаја за следеће експерименте:

Решење:

a) Бацање новчића $\Omega = \{P, G\}$ $c(\Omega) = 2$

b) Новчић се баца два пута $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$ $c(\Omega) = 4$

c) Новчић се баца три пута $\Omega = \{PPP, PPG, PGP, GPP, GGP, GPG, PGG, GGG\}$ $c(\Omega) = 8$

2. Колико елемената има простор елементарних догађаја за експеримент: новчић се баца *n* пута?

Решење: $c(\Omega) = 2^n$

3. Навести простор елементарних догађаја и одредити кардинални број простора елементарних догађаја за експеримент: коцка за игру се баца 2 пута.

Решење: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 66\}$ $c(\Omega) = 36$

4. Навести простор елементарних догађаја и одредити кардинални број простора елементарних догађаја за експеримент: Коцка за игру се баца све док збир регистрованих бројева не постане већи од два.

Решење: $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 111, 112, 113, 114, 115, 116\}$

$c(\Omega) = 21$

5. Навести простор елементарних догађаја и одредити кардинални број простора елементарних догађаја за експеримент: Коцка за игру се баца једанпут, па ако је пао број мањи од четири још једном.

Решење: $\Omega = \{4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

$c(\Omega) = 21$

Дефиниција: Нека је Ω простор елементарних догађаја неког експеримента. Сваки подскуп A скупа Ω зове се случајни догађај.
Догађај A се реализује ако је ма који од његових елементарних догађаја исход експеримента. Догађај Ω који се увек реализује зовемо сигуран догађај, а догађај $\varnothing$ који се никада не може реализовати зовемо немогућ догађај.

Дефиниција: Супротан догађај, у ознаци $\overline{A}$ је догађај који се реализује ако и само ако се не реализује догађај A. $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Пример: Коцка за играње се баца једанпут.

простор елементарних догађаја је $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $c(\Omega) = 6$

догађај „пао је паран број“ је $A=\{2,4,6\}$, $c(A)=3$
догађај „пао је непаран број“ $\overline{A}=\{1,3,5\}$, $c(\overline{A})=3$
догађај „пао је број 7 “ $B=\emptyset$ $c(B)=0$
догађај „пао је број мањи од 7 “ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $c(\Omega)=6$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 608,609,610

Редни број часа _____

Наставна јединица: Операције са догађајима
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појмова који се односе на увод у вероватноћу
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.1. Пребројава могућности (различитих избора или начина) у једноставним реалним ситуацијама.
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: случајни догађаји

Уводни део часа: 5 мин.

Пример: За експеримент „новчић се баца три пута“ наведи следеће догађаје:

- A - пашће бар два писма $A=\{PPG, GPP, PGP, PPP\}$
- $\overline{A}$ - пашће бар две главе $\overline{A}=\{PGG, GGP, GGG, PGP\}$
- B - пашће три пута иста страна $B=\{PPP, GGG\}$

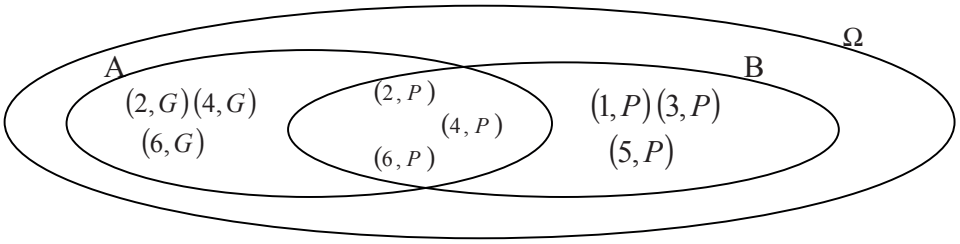
Главни део часа: 35 мин.

Са догађајима као подскуповима скупа Ω вршимо скуповне операције: унију, пресек и разлику.
Дефиниција: Ако се приликом вршења једног експеримента реализацијом догађаја A увек реализује и догађај B, тада кажемо да догађај A повлачи догађај B и важи $A \subset B$.
Дефиниција: Ако се приликом вршења једног експеримента реализацијом догађаја A увек реализује и догађај B и реализацијом догађаја B увек реализује и догађај A, тада кажемо да су догађаји A и B еквивалентни или једнаки и пишемо $A=B$.

205

Дефиниција: Унија догађаја A и B је догађај $A \cup B$ који се реализује ако и само ако се реализује бар један од догађаја A и B.
Дефиниција: Пресек догађаја A и B је догађај $A \cap B$ који се реализује ако и само ако се истовремено реализују и догађај A и догађај B.
Дефиниција: Разлика догађаја A и B је догађај A\B који се реализује ако и само ако се реализује догађај A и не реализује догађај B.

Пример: Нека се експеримент састоји у истовременом бацању коцке и новчића. Нека је догађај A - пао је паран број на коцки, B - пало је писмо на новчићу.
Решење: $\Omega = \{ (1,P), (1,G), (2,P), (2,G), (3,P), (3,G), (4,P), (4,G), (5,P), (5,G), (6,P), (6,G) \}$
и $c(\Omega) = 12$
$A = \{ (2,P), (2,G), (4,P), (4,G), (6,P), (6,G) \}$ и $c(A) = 6$
$B = \{ (1,P), (2,P), (3,P), (4,P), (5,P), (6,P) \}$ и $c(B) = 6$
$A \cup B$ је догађај да се на коцки добије паран број или на новчићу писмо
$A \cup B = \{ (1,P), (2,P), (2,G), (3,P), (4,P), (4,G), (5,P), (6,P), (6,G) \}$ и $c(A \cup B) = 9$
$A \cap B$ је догађај да се на коцки добије паран број и на новчићу писмо
$A \cap B = \{ (2,P), (4,P), (6,P) \}$ и $c(A \cap B) = 3$
A\B је догађај да се на коцки добије паран број и да се на новчићу не појави писмо
A\B $= \{ (2,G), (4,G), (6,G) \}$ и c(A\B)=3



Задаци
1. Одредити супротне догађаје датим догађајима:
   а) Појавила су се 2 грба при бацању 2 новчића
   б) Појавила су се бар 2 писма при бацању 2 новчића
   в) Појавио се бар 1 прост број при бацању 2 коцке за игру
2. Бацају се 2 коцке за игру. Нека је A елементарни догађај да је збир бројева који су пали мањи од 5, B елементарни догађај да је збир бројева који су пали мањи од 8 и C елементарни догађај да је збир бројева који су пали паран, D елементарни догађај да је збир бројева који су пали непаран. Одредити скупове: A,B,C,D, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap C$, $A \cup \overline{D}$, $A \cap B \cap C$. Изразити речима наведене догађаје.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 611,613,614

206

Редни број часа _____

Наставна јединица: Вероватноћа
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појмова који се односе на увод у вероватноћу
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: вероватноћа

Уводни део часа: 10 мин.

Мотив за почетак проучавања вероватноће био је добитак у играма на срећу. Научни карактер у излагању вероватноћа добија од 17. Века. Један од познатих математичара - коцкара био је Ђироламо Кардано (1501-1576). Смишљајући стратегије за освајање новца, формулисао је нека елементарна правила вероватноће. Написо је „Књигу о играма на срећу“ (1526) у којој наводи резултате до којих је дошао. За развој теорије вероватноће значајна је и преписка између Пјера Ферме (1601-1665) и Блеза Паскала (1623-1662) из 1654. године. Они су решавали проблем познат као подела улога. Игра се састоји из више рунди, играју два играча са једнаким шансама за победу. Такмичари улажу исту суму новца и унапред се договоре да први играч који победи у одређеном броју рунди осваја сав новац. Претпоставимо да је игра прекинута услед непредвиђених спољних околности, пре него што је било који играч победио. Проблем је био како у том случају поделити новац. Три године касније, након што га је Паскал увео у материју, Кристијан Хајгенс (1629-1657) издаје прву књигу која излагању вероватноће даје научни карактер „Расуђивање у играма на срећу“. Осам година након смрти Јакоба Бернулије (1654-1705) објављено је његово дело „Уметност погађања“. Поред тога што систематично излаже већ познате резултате, Бернули први даје доказе за неке теореме.

207

Абрахам де Муавр (1667-1754), је 1718. године објавио књигу „Доктрина случајности“ у којој уводи појам случајног догађаја. Пјер Симон Лаплас (1749-1827), у делу „Аналитичка теорија вероватноће“ доказује низ тврђења у облику у коме их и данас користимо. Основе за модерну теорију вероватноће, засновану на теорији мере, поставио је Андреј Колмогоров (1903-1987). Издао је књигу „Основи теорије вероватноће“ (1933), у којој аксиоматски поставља ову област математике.

Главни део часа: 30 мин.

Теорија вероватноће изучава случајне догађаје и законитости у сфери случајности. Реализација догађаја у експериментима може се бројчано мерити и ту меру називамо вероватноћа.

Дефиниција (класична): Нека је Ω простор елементарних догађаја експеримента чији су исходи једнако вероватни и A елементарни догађаји који испуњавају постављене услове, дакле повољни догађаји и важи $A \subseteq \Omega$. Вероватноћа случајног догађаја A је $p(A) = \frac{m}{n}$, где је број m број повољних исхода, тј. број елемената скупа A, а n укупан број догађаја, тј. број елемената скупа Ω.

Особине вероватноће:

- ненегативност: за сваки догађај A важи $p(A) \geq 0$.
- нормираност: $p(\Omega) = 1$
- адитивност: ако су догађаји A и B дисјунктни догађаји онда важи $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- вероватноћа супротног догађаја једнака је $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- вероватноћа немогућег догађаја једнака је 0.
- Ако је $A \subseteq B$ онда је $p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Задаци

1. Бацамо 2 новчића. Одредити вроватноћу догађаја A да се при бацању појави грб бар на једном новчићу.
   Решење: $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$ $\quad n = c(\Omega) = 4$
   $A = \{PG, GP, GG\}$ $\quad m = c(A) = 3$ $\quad p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

2. Бацамо 3 новчића. Одреди вероватноће догађаја A - на првом новчићу се појавило писмо, B - бар на једном новчићу се појавило писмо, C –појавила су се тачно 2 писма, D - није се појавило више од 2 писма.
   Решење: $\Omega = \{PPP, PPG, PGP, GPP, GGP, GPG, PGG, GGG\}$ $\quad n = c(\Omega) = 8$
   $A = \{PPP, PPG, PGP, PGG\}$ $\quad m = c(A) = 4$ $\quad p(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

208

$B=\{PPP,PPG,PGP,GPP,GGP,GPG,PGG\}$ $\quad m=c(B)=7$ $\quad p(B)=\frac{m}{n}=\frac{7}{8}$

$C=\{PPG,PGP,GPP\}$ $\quad m=c(C)=3$ $\quad p(C)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$

$D=\{PPG,PGP,GPP,GGP,GPG,PGG,GGG\}$ $\quad m=c(D)=7$ $\quad p(D)=\frac{m}{n}=\frac{7}{8}$

3. (Збирка, задатак 620) Колика је вероватноћа да се при бацању коцке 2 пута узастопно појави страна са 6 тачака?

4. Бацамо 3 коцке. Одредити вероватноћу догађаја A - збир бројева који су се појавили износи 4 и B - производ бројева који су се појавили износи 4.
   Решење: $\Omega=\{111,112,\ldots 665,666\}$ $\quad n=c(\Omega)=6^3=216$

   $A=\{112,121,211\}$ $\quad m=c(A)=3$ $\quad p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$

   $B=\{122,212,221,114,141,411\}$ $\quad m=c(B)=6$ $\quad p(B)=\frac{m}{n}=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 616,617,618,619

209

210

Редни број часа _____

Наставна јединица: Вероватноћа
Тип часа: понављање и утврђивање, вежбање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Увежбати примену теорије вероватноће у практичним примерима
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: вероватноћа

Ток првог часа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Понављање појма и особина вероватноће.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1. Наћи вероватноћу да од 52 карте за игру извучемо или краља или даму?

   Решење: A - догађај да је извучена карта краљ, $p(A)=\frac{4}{52}$,

   B-извучена карта је дама, $p(B)=\frac{4}{52}$

   Догађаји A и B су независни $p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{2}{13}$

211

2. Наћи вероватноћу да од 52 карте извучемо или даму или херц?

Решење: A - догађај да је извучена карта дама $p(A)=\frac{4}{52}$,

B-извучена карта је херц $p(B)=\frac{13}{52}$

$A\cap B$ - догађај да је извучена карта дама-херц $p(A\cap B)=\frac{1}{52}$

Догађаји A и B су зависни (могуће је да се десе истовремено)

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{4}{13}$$

3. (Збирка, задатак 622) Наћи вероватноћу да се у два узастопна бацања двеју коцки добије:

а) оба пута збир 7
б) једанпут збир 6, а једанпут 9
в) први пут збир 8, а други пут 10

Решење:

а) H_1 - пао је збир 7 у првом бацању H_2 - пао је збир 7 у другом бацању

$\Omega=\{11,12,13,\ldots,66\}$ $c(\Omega)=36$

$H_1=\{16,\ 25,\ 34,43,52,61\}$ $c(H_1)=6$

$H_2=\{16,\ 25,\ 34,43,52,61\}$ $c(H_2)=6$

Први пут је пао збир 7 и други пут је пао збир 7

$$p(H_1)\cdot p(H_2)=\frac{6}{36}\cdot\frac{6}{36}$$

б) H_1 - пао је збир 6 у једном бацању H_2 - пао је збир 9 у једном бацању

$H_1=\{15,\ 24,\ 33,42,51,\}$ $c(H_1)=5$

$H_2=\{36,\ 45,\ 54,63\}$ $c(H_2)=4$

(Први пут је пао збир 6 и други пут је пао збир 9) или (Први пут је пао збир 9 и други пут је пао збир 6)

$$p(H_1)\cdot p(H_2)+p(H_2)\cdot p(H_1)=\frac{5}{36}\cdot\frac{4}{36}+\frac{4}{36}\cdot\frac{5}{36}$$

в) H_1 - пао је збир 8 у првом бацању H_2 - пао је збир 10 у другом бацању

$H_1=\{26,\ 35,\ 44,53,62,\}$ $c(H_1)=5$

$H_2=\{46,55,64\}$ $c(H_2)=3$

Први пут је пао збир 8 и други пут је пао збир 10

$$p(H_1)\cdot p(H_2)=\frac{5}{36}\cdot\frac{3}{36}$$

4. Колика је вероватноћа да ће се на двема баченим коцкама добити збир тачака 9 или, ако се то не догоди, да се при следећем бацању појави збир тачака 8?

Решење:

A - догађај да је пао збир 9 $p(A)=\frac{4}{36}$ (45, 54, 36, 63)

212

$\overline{A}$ - догађај да није пао збир 9 $\quad p(A)=\frac{32}{36}$

B - догађај да је пао збир 8 $\quad p(B)=\frac{5}{36}$ $\quad$ (44, 53, 35, 26, 62)

$A+\overline{A}B$ догађај да је пао збир 9 или (није пао збир 9 и пао је збир 8)

$$p(A+\overline{A}B)=\frac{1}{9}+\frac{32}{36}\cdot\frac{5}{36}=\frac{19}{81}$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 622

Ток другог часа

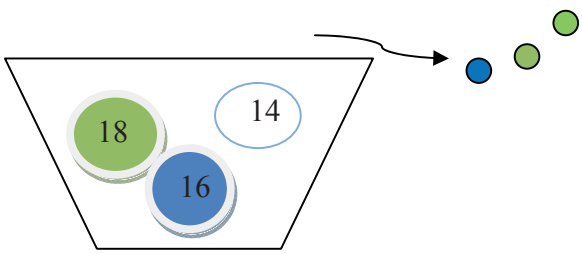
Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци (задатке раде ученици)

1. (Збирка, задатак 623) У кутији има 18 зелених, 16 плавих и 14 белих куглица. Колика је вероватноћа да ће се у три узастопна извлачења добити: а) два пута зелена, а једанпут плава куглица, б) први пут бела, други и трећи пут плава куглица, ако се извучена куглица не враћа у кутију?



Решење:

а) У кутији се налази 48 куглица

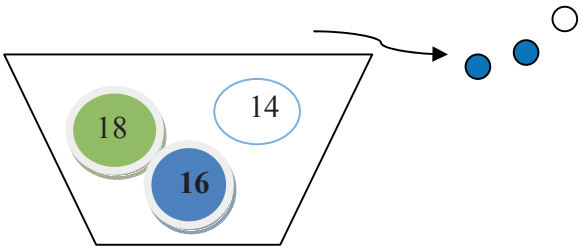
H_1 -прва извучена куглица је зелена

H_2 -друга извучена куглица је зелена

H_3 -трећа извучена куглица је плава

$$p(H_1)\cdot p(H_2)\cdot p(H_3)=\frac{18}{48}\cdot\frac{17}{47}\cdot\frac{16}{46}=\frac{51}{1081}$$

Пошто имамо 3 могућа редоследа куглица *ЗЗП, ЗПЗ, ПЗЗ*, решење је $3\cdot\frac{51}{1081}=\frac{153}{1081}$



б) У кутији се налази 48 куглица

H_1 -прва извучена куглица је бела

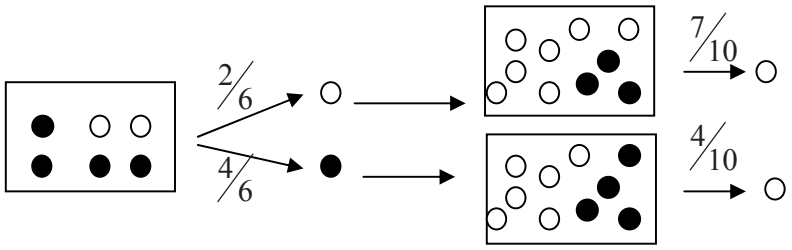
H_2 -друга извучена куглица је плава

213

H_3-трећа извучена куглица је плава

$$p(H_1)\cdot p(H_2)\cdot p(H_3)=\frac{14}{48}\cdot\frac{16}{47}\cdot\frac{15}{46}=\frac{35}{1081}.$$

2. У једној кутији се налазе 4 црне и 2 беле куглице, а у другој 3 црне и 6 белих куглица. Не гледајући извлачимо једну куглицу из прве кутије и убацујемо у другу, а затим из друге кутије извлачимо једну куглицу. Која је вероватноћа догађаја B да ће извучена куглица бити бела?
Решење:



$$p(B)=\frac{2}{6}\frac{7}{10}+\frac{4}{6}\frac{4}{10}=\frac{1}{2}$$

3. (Збирка, задатак 625) Из шпила од 52 карте извлаче се истовремено четири карте. Одредити вероватноћу догађаја да се међу извученим картама налази:
а) тачно једна треф - карта; б) бар једна треф - карта;
в) све четири треф - карте; в) ниједна треф карта.
Решење:

а) Из шпила од 52 карте можемо изабрати четири карте на $\binom{52}{4}$ начина (подсетимо се реч је о комбинацијама). Једну треф - карту бирамо из скупа од 13 карата колико има трефова на $\binom{13}{1}$ начина. Три преостале карте бирамо од преосталих 39 карата које нису трефови на $\binom{39}{3}$ начина. Означимо са A догађај да је извучена тачно једна треф карта, онда је

$$p(A)=\frac{\binom{13}{1}\binom{39}{3}}{\binom{52}{4}}.$$

б) Из шпила од 52 карте можемо изабрати четири карте на $\binom{52}{4}$ начина. Означимо са B догађај да је извучена бар једна треф - карта. Догађај $\overline{B}$ је догађај да није извучена ниједна треф карта, што значи да су све четири карте изабране од преосталих 39 карата које нису треф на $\binom{39}{4}$ начина.

214

$p(\overline{B}) = \dfrac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}$. Сада лако добијамо $p(B) = 1 - p(\overline{B})$.

в) Означимо са C догађај да су извучене све четири треф-карте: $p(C) = \dfrac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$

г) $\overline{B}$ је догађај да није извучена ниједна треф карта

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 627,629.

215

216

Редни број часа _____

Наставна јединица: Условна вероватноћа
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појма условне вероватноће
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: условна вероватноћа

Уводни део часа: 5 мин.

Контрола домаћег задатка. Понављање појма и особина вероватноће.

Главни део часа: 35 мин.

Дефиниција: Нека је $A \subset \Omega, B \subset \Omega, p(A) \neq \emptyset$. Условна вероватноћа догађаја B у односу на догађај A (вероватноћа да се десио догађај B под условом да је реализован догађај A) је:

$$\boxed{p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$$

Догађаји су независни ако важи $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Задаци

1. У једном одељењу од 30 ученика, 12 се бави неким спортом, а 8 ученика има плаву косу, док 5 ученика има плаву косу и бави се неким спортом.

217

Нека је $\Omega = \{u_1, u_2, \cdots, u_{30}\}$ скуп свих ученика посматраног одељења. Нека је A подскуп скупа Ω коме припадају ученици који се баве неким спортом, а B подскуп скупа Ω коме припадају ученици који имају плаву косу. Скуп $A \cap B$ скуп свих ученика који се баве неким спортом и имају плаву косу.
Уколико се прозове произвољан ученик према редном броју у дневнику за њега ће важити: $p(A) = \frac{12}{30}$, $p(B) = \frac{8}{30}$, $p(A \cap B) = \frac{5}{30}$.
Претпоставимо да је устао плавокоси ученик. Он сигурно припада скупу B, али и даље не знамо да ли се бави неким спортом. Пошто у скупу B има 5 ученика који се баве неким спортом закључујемо да је вероватноћа да се плавокоси ученик бави неким спортом $\frac{5}{8}$. То је вероватноћа $p(A|B) = \frac{5}{8}$. Дакле $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
Исто примећијемо да је $p(A|B) \neq p(A)$ што значи да су догађаји зависни.

Ако бисмо интуитивно размишљали јасно је да боја косе нема никакве везе са бављењем спортом код извесне особе. Дакле само на скупу ученика овог одељења важи зависност наведених догађаја. Општи закључак у овом случају није могуће донети на основу статистичких узорака.

2. (Збирка, задатак 645) Коцка за игру баца се 2 пута. Нека је A догађај да је оба пута пао број већи од 3 и B догађај да је збир добијених поена непаран. Одредити $p(B|A)$.
Решење:
$\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 66\}$ $\quad c(\Omega) = 36$
$A = \{44, 45, 46, 54, 55, 56, 64, 65, 66\}$ $\quad c(A) = 9$ $\quad p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
$AB = \{45, 54, 56, 65\}$ $\quad c(AB) = 4$ $\quad p(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{4}{9}$.
3. (Збирка, задатак 646) У кутији се налази 6 плавих и 4 црвене куглице. Случајно се извлаче одједном 3 куглице. Ако је изабрана бар једна плава куглица, израчунати вероватноћу догађаја да су све извучене куглице плаве боје.
Решење:
A - догађај да је изабрана бар једна плава куглица
$\overline{A}$ - догађај да није изабрана ниједна плава куглица $p(\overline{A}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$
$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \frac{29}{30}$

218

B - догађај да су све три извучене куглице плаве: $p(B)=\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{6}$

$A\cap B=B$

$$p(B|A)=\frac{p(AB)}{p(A)}=\frac{5}{29}$$

4. (Збирка, задатак 647) Из шпила од 52 карте извлачи се 5 карата. Нека A означава догађај да су бар 3 извучене карте треф, а B догађај да су свих 5 извучених карата трефови. Одредити $p(B|A)$.

   Решење:

$$p(A)=\frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}+\frac{\binom{13}{4}\binom{39}{3}}{\binom{52}{5}}+\frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \qquad p(B)=\frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \qquad A\cap B=B$$

$$p(B|A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

5. Новчић се баца 3 пута. Ако је у првом бацању пало писмо, колика је вероватноћа да су пала бар 2 писма?

   Решење:

   Простор елементарних догађаја: $\Omega=\{PPP,PPG,PGP,GPP,PGG,GPG,GGP,GGG\}$

   A - догађај да је у првом бацању пало писмо $A=\{PPP,PPG,PGP,PGG\}$ $p(A)=\dfrac{4}{8}$

   B - догађај да су пала бар 2 писма $B=\{PPP,PPG,PGP,GPP\}$

   $A\cap B=\{PPP,PPG,PGP\}$ $p(A\cap B)=\dfrac{3}{8}$ $p(B|A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{3}{4}$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 642, 643, 644.

219

220

Редни број часа _____

Наставна јединица: Потпуна вероватноћа
Тип часа: обрада, понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање и утврђивање појма потпуне вероватноће
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: потпуна вероватноћа

Ток првог часа

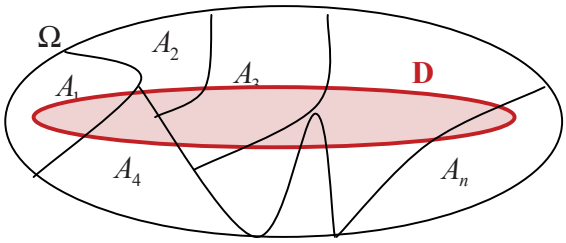
Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Формула потпуне вероватноће: Нека су $A_1, A_2, \cdots, A_n$ међусобно дисјунктни подскупови скупа Ω такви да је њихова унија једнака скупу Ω и да су њихове вероватноће различите од нула и нека је $D \subset \Omega$ произвољан догађај. Тада је

$$p(D) = p(D|A_1)p(A_1) + p(D|A_2)p(A_2) + \cdots + p(D|A_n)p(A_n)$$



221

Задаци

1. На испит из математике изашло је 60% студената који полажу први пут и 40% осталих. Вероватноћа да ће студент који полаже испит први пут положити је 0,4, а за остале 0,5. Одредити вероватноћу да ће случајно изабрани студент положити испит.
   Решење: P - догађај да ће случајно изабрани студент положити испит

   H_1 - претпоставка да студент полаже испит први пут, $p(H_1)=0{,}6$

   $p(P|H_1)=0{,}4$

   H_2 - претпоставка да студент полаже испит више пута, $p(H_2)=0{,}4$

   $p(P|H_2)=0{,}5$

   $$p(P)=p(P|H_1)p(H_1)+p(P|H_2)p(H_2)=0{,}44$$

2. (Збирка, задатак 650) На столу се налазе три једнаке кутије. У првој се налази a белих и b црних куглица, у другој c белих и d црних, а у трећој су само беле куглице. Из једне од кутија се вади једна куглица. Наћи вероватноћу да она буде бела.
   Решење: B- догађај да је извучена бела куглица

   H_1 - претпоставка да је куглица извучена из прве кутије $p(H_1)=\frac{1}{3}$

   $p(B|H_1)=\frac{a}{a+b}$

   H_2 - претпоставка да је куглица извучена из друге кутије $p(H_2)=\frac{1}{3}$

   $p(B|H_2)=\frac{c}{c+d}$

   H_3 - претпоставка да је куглица извуче на из треће кутије $p(H_3)=\frac{1}{3}$

   $p(B|H_3)=1$

   $$p(B)=p(B|H_1)p(H_1)+p(B|H_2)p(H_2)+p(B|H_3)p(H_3)=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right)$$

3. Једну коцку смо обојили, а затим је исекли на мање међусобно једнаке коцке 3 пута краћих ивица од полазне. Случајно бирамо једну од тако добијених коцки и бацамо је. Одредити вероватноћу догађаја D да је бачена коцка пала на обојену страну.
   Решење:

   Малих коцки има укупно 27

   H_0 - претпоставка да на коцки нема обојених страна

   $p(H_0)=\frac{1}{27}$ $\qquad p(D|H_0)=0$

   H_1 - претпоставка да коцка има једну обојену страну

222

$$p(H_1)=\frac{6}{27} \qquad p(D|H_1)=\frac{1}{6}$$

H_2 - претпоставка да коцка има две обојене стране

$$p(H_2)=\frac{12}{27} \qquad p(D|H_2)=\frac{2}{6}$$

H_3 - претпоставка да коцка има три обојене стране

$$p(H_2)=\frac{8}{27} \qquad p(D|H_2)=\frac{3}{6}$$

$$p(D)=p(D|H_0)p(H_0)+p(D|H_1)p(H_1)+p(D|H_2)p(H_2)+p(DH_3)p(H_3)=\frac{1}{3}$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 648,658.

Ток другог часа

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

1. У некој фабрици 30% производње се реализује на машини *A*, 25% на машини *B*, а остатак на машини *C*. На машини *A* се направи око 1% шкарта, на машини *B* око 1,5% шкарта, на машини *C* око 2% шкарта. Током дана ове машине произведу 1000 производа. Колика је вероватноћа да ће случајно изабрани производ бити шкарт?
   Решење:
   D - догађај да је случајно изабрани производ шкарт
   A - догађај да је производ израђен на машини А, $p(A)=0{,}3$ $\quad p(D|A)=0{,}01$
   B - догађај да је производ израђен на машини В, $p(A)=0{,}25$ $\quad p(D|A)=0{,}015$
   C - догађај да је производ израђен на машини С, $p(A)=0{,}45$ $\quad p(D|A)=0{,}02$
   $$p(D)=p(D|A)p(A)+p(D|B)p(B)+p(D|C)p(C)=0{,}01575$$

2. Да би пронашао једну књигу ученик има намеру да обиђе 2 библиотеке. За сваку од библиотека је једнако вероватно да нема, односно да има тражену књигу у свом књижном фонду. Такође, уколико библиотека има књигу, вероватноћа да је та књига слободна једнака је вероватноћи да је заузета. Колика је вероватноћа да ће ученик пронаћи дату књигу?
   Решење:
   A_1 - догађај да прва библиотека има књигу,
   $\overline{A_1}$ - догађај да прва библиотека нема књигу
   A_2 - догађај да друга библиотека има књигу,

223

$\overline{A}_2$ - догађај да друга библиотека нема књигу

$p(A_1)=p(\overline{A}_1)=p(A_2)=p(\overline{A}_2)=\frac{1}{2}$

B_1 - догађај да је књига слободна у првој библиотеци,

$\overline{B}_1$ - догађај да је књига заузета у првој библиотеци

B_2 - догађај да је књига слободна у другој библиотеци,

$\overline{B}_2$ - догађај да је књига заузета у другој библиотеци

$p(B_1)=p(\overline{B}_1)=p(B_2)=p(\overline{B}_2)=\frac{1}{2}$

D - догађај да је ученик нашао књигу, $\overline{D}$ - догађај да ученик није нашао књигу

$$p(\overline{D})=p(\overline{A}_1+A_1\overline{B}_1)\cdot p(\overline{A}_2+A_2\overline{B}_2)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$$

$$p(D)=1-p(\overline{D})=\frac{7}{16}$$

3. (Збирка, задатак 656) Из кутије која садржи 3 беле и 2 црне куглице пребачене су две случајно изабране куглице у кутију која садржи 4 беле и 4 црне куглице. Наћи вероватноћу да се после тога из друге кутије извуче бела куглица.
Решење: B- догађај да је извучена бела куглица

H_1 - претпоставка да су пребачене две беле куглице

$$p(H_1)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10} \qquad p(B|H_1)=\frac{6}{10}$$

H_2 - претпоставка да су пребачене једна бела и једна црна куглица

$$p(H_2)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{5} \qquad p(B|H_2)=\frac{5}{10}$$

H_3 - претпоставка да су пребачене две црне куглице

$$p(H_1)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10} \qquad p(B|H_1)=\frac{4}{10}$$

$$p(B)=p(B|H_1)p(H_1)+p(B|H_2)p(H_2)+p(B|H_3)p(H_3)=0{,}52$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 653, 659.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Случајне величине
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појма и суштине случајне величине
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
2.МА.2.4.3. Разуме концепт дискретне случајне величине и израчунава очекивану вредност,
стандардно одступање и дисперзију(варијансу).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: случајне величине

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Пример 1: У експерименту бацања два динара $\Omega = \{(П,П),(П,Г),(Г,П),(Г,Г)\}$. Број јављања грбова посматрамо као једну променљиву величину X:

Простор узорка	Број грбова
П,П	0
П,Г	1
Г,П	1
Г,Г	2

Током експеримента не можемо предвидети вредности које ће узети променљива *X,* јер се оне дешавају случајно, па се величина *X* назива случајна променљива.

Различите вредности променљиве *X*, број грбова	Вероватноћа
0	1/4
1	1/2
2	1/4
Σ	1

или $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Закључак: ниједна вероватноћа у распореду вероватноћа не може бити негативна и сума вероватноћа свих могућих вредности случајне променљиве је 1.
Функција која пресликава скуп елементарних догађаја у скуп реалних бројева назива се случајна променљива.

Пример 2: Бацају се 2 коцке истовремено и бележи збир добијених бројева. Збир добијених бројева може бити 2, 3, ... , 12. Придружићемо збиру бројева вероватноћу: $p(2)=p(X=2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$, $p(3)=p(X=3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}.$, . . .
Расподела случајне променљиве је:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Запазимо да је збир вероватноћа случајних догађаја у расподели случајне променљиве 1.

Задаци

1. (Збирка, задатак 683) У једној гимназији ученика прве године има 30%, друге 25%, треће 25% и четврте 20%. Ако је случајна променљива X година учења случајно одабраног ученика, одредити закон за X.

   Решење: $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

2. Динар се баца 4 пута. Случајна променљива *X* се дефинише као број појављивања грба. Наћи расподелу вероватноће ове случајне променљиве.

   Решење: $p(0)=p(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ *ПППП*

   $p(1)=p(X=1)=4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$ *ГППП, ПГПП, ППГП, ПППГ*

   $p(2)=p(X=2)=6\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$ *ГГПП, ГПГП, ГППГ, ПГГП, ПГПГ, ППГГ*

$$p(3)=p(X=3)=4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4} \qquad ПГГГ,\ ГПГГ,\ ГГПГ,\ ГГГП$$

$$p(4)=p(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16} \qquad ГГГГ$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

3. У кутији се налази 6 црвених и 4 беле куглице. Извлаче се две куглице одједном. Случајна променљива представља број белих куглица. Наћи њену расподелу.
   Решење:

$$p(0)=p(X=0)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{3} \qquad p(1)=p(X=1)=\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{8}{15}$$

$$p(2)=p(X=2)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2}{15}$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 685,686.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Биномна расподела
Тип часа: обрада
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појма биномне расподеле
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: биномна расподела

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Вршимо експеримент који може имати само 2 исхода: A и $\overline{A}$. Такав експеримент је на пример бацање динара, где је A појава грба и $\overline{A}$ појава писма.
Уколико експеримент поновимо $n-$пута и посматрамо случајну променљиву која представља број реализација догађаја A важи: $\boxed{p(k)=p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}$. Догађај A се реализује са вероватноћом $p(A)=p$, а догађај $\overline{A}$ са веоватноћом $p(\overline{A})=1-p=q$. Оваква расподела зове се биномна расподела.
Применимо образац на задатак са претходног часа и 4 бацања динара где се случајна променљива X се дефинише као број појављивања грба.
Важи $n=4, k$ узима вредности од 0 до 4, па је:

$p = q = \frac{1}{2}$ и $p(k) = p(X = k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}$

Задаци

1. У кутији се налазе 3 беле и 5 црних куглица. Извлачимо 4 пута по једну куглицу са враћањем. Нека је случајна променљива X дефинисана као број појављивања беле куглице у та 4 извлачења. Наћи расподелу вероватноће ове случајне променљиве.
   Решење:
   Вероватноћа да је куглица бела је $p = \frac{3}{8}$, а вероватноћа да је куглица црна је $q = \frac{5}{8}$
   Случајна променљива X узима вредности из скупа $k \in \{0,1,2,3,4\}$
   $$p(k) = p(X = k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{4-k}$$
   $$p(0) = p(X = 0) = \left(\frac{5}{8}\right)^4 \qquad p(1) = p(X = 1) = 4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3$$
   $$p(2) = p(X = 2) = 6 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 \qquad p(3) = p(X = 3) = 4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)$$
   $$p(4) = p(X = 4) = \left(\frac{3}{8}\right)^4$$

2. Која је вероватноћа да ће бела куглица из претходног примера бити извучена бар 2 пута?
   Решење:
   $p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4)$

3. Коцка за игру се баца 5 пута. Наћи расподелу случајне променљиве X која представља укупан број појављивања броја 6 у тих 5 бацања.
   Решење:
   Вероватноћа да се појавио број 6 је $p = \frac{1}{6}$, а вероватноћа да се није појавио број 6 је $q = \frac{5}{6}$
   Случајна променљива X узима вредности из скупа $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$
   $$p(k) = p(X = k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

4. Стрелац погађа мету са вероватноћом 0,7. Колика је вероватноћа да ће у 12 покушаја погодити 8 пута?
   Решење:

$$p(X=8)=\binom{12}{8}0{,}7^8\cdot 0{,}3^4\approx 0{,}23=23\%$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак: (наставни листић)
Међу ученицима једне школе је 8% одлично са просеком 5,00. Ако посматрамо групу од 12 ученика које евидентирамо, затим шаљемо назад у шлолу, колика је вероватноћа да ће међу евидентираним бити 4 скроз одлична ученика? Наћи расподелу случајне променљиве X која представља број скроз одличних ученика међу евидентираним.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Биномна расподела
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: наставни листићи, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Утврђивање појма биномне расподеле
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
2.МА.3.4.4. Користи методе вероватноће и статистике у финансијама.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: биномна расподела

Уводни део часа: 5 мин.

Анализа домаћег задатка.

Главни део часа: 35 мин.

Задаци

1. Ако је учесталост крвне групе *A* у некој популацији 42% која је вероватноћа да ће се у групи од 10 људи из те популације наћи 3 особе са крвном групом *A*? Направити табеларни приказ вероватноћа.
   Решење: Вероватноћа догађаја да посматрана особа има крвну групу *A*: $p = 0{,}42$, а вероватноћа да посматрана особа нема крвну групу *A*: $q = 0{,}58$.

$$p(k) = p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot (0{,}1)^k \cdot (0{,}9)^{n-k}$$

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot (0{,}42)^3 \cdot (0{,}58)^7 = 0{,}1963$$

Број особа са крвном групом *A*	Вероватноћа
0	0,0043
1	0,0312
2	0,1017
3	0,1963
4	0,2488
5	0,2162
6	0,1304
7	0,0540
8	0,0146
9	0,0023
10	0,0002
Σ	1

2. Приликом производње пластичног гранулата утврђено је да се појављује 10% пакета у којима има шкарта. Одредити вероватноћу да међу 20 случајно изабраних пакета гранулата буде:
   а) свих 20 пакета исправно
   б) тачно 1 пакет са шкартом
   в) бар 2 пакета са шкартом
   Решење:
   Вероватноћа догађаја да пакет гранулата садржи шкарт је $p = 0{,}1$, а вероватноћа да пакет гранулата не садржи шкарт је $q = 0{,}9$.
   Вероватноћа да међу n пакета пластичног гранулата тачно k садржи шкарт је:
   $$p(k) = p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot (0{,}1)^k \cdot (0{,}9)^{n-k}$$
   а) $p(0) = p(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^{20} = (0{,}9)^{20} = 0{,}12$
   б) $p(1) = p(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^{19} = 0{,}27$
   в) $p(X \geq 2) = 1 - p(0) - p(1) = 0{,}61$

3. Производи једне велике серије, која садржи 0,7% дефектних производа, пакују се у картонске кутије по 100 производа. Колики ће проценат кутија бити без иједног дефектног производа, а колики са 2 или више дефектних производа?
   Решење:
   $$p(k) = p(X = k) = \binom{100}{k} \cdot (0{,}007)^k \cdot (0{,}993)^{100-k}$$

$$p(0)=p(X=0)=\binom{100}{0}\cdot(0{,}007)^0\cdot(0{,}993)^{100}=0{,}49536$$

Око 49,5% кутија нема дефектне производе

$$p(1)=p(X=1)=\binom{100}{1}\cdot(0{,}007)^1\cdot(0{,}993)^{99}=0{,}3492$$

$$p(X\geq 2)=1-p(0)-p(1)=0{,}15544$$

Значи да 15,5% кутија садржи 2 или више дефектних производа.

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак (на наставним листићима)

1. Вероватноћа да је произведени компјутер неисправан је 0,01. Колика је вероватноћа да ако је купљено 100 компјутера:
   а) Број неисправних компјутера је тачно10.
   б) Број исправних компјутера је већи од 98.
   в) Број неисправних компјутера је мањи од 3.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Средња вредност и дисперзија
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање појма средње вредности и дисперзије
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.2.4.1. Примењује правила комбинаторике за пребројавање могућности (различитих избора или начина).
2.МА.1.4.3. Разуме концепт вероватноће и израчунава вероватноће догађаја у једноставним ситуацијама.
2.МА.2.4.3. Разуме концепт дискретне случајне величине и израчунава очекивану вредност, стандардно одступање и дисперзију (варијансу).
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: средња вредност, дисперзија

Уводни део часа: 5 мин.

Пример: (Збирка, задатак 690) Случајна променљива X означава збир добијених поена при бацању 2 коцке. Расподела наведене случајне променљиве је рађена на часу и неки од ученика може да је испише:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Колика ће бити просечна вредност уколико експеримент поновимо много пута?

Главни део часа: 35 мин.

У теорији вероватноће, очекивана вредност (или математичко очекивање) дискретне случајне променљиве је збир вероватноћа за сваки исход помножен вредношћу тог исхода. Очекивана вредност представља просечну вредност која се очекује ако се случајни

експеримент понови велики број пута. Треба имати у виду да сама очекивана вредност не мора бити међу вредностима које узима случајна променљива.

Ученици су из предмета статистика учили математичко очекивање и дисперзију, тако да се наведене дефиниције излажу уз сарадњу са ученицима.

Дефиниција: Нека је X случајна променљива са расподелом $X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

Математичко очекивање случајне променљиве X се означава са $E(X)$ (expectation) једнако је: $\boxed{E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n}$

У практичним истраживањима, појам очекивана вредност случајне променљиве X најчешће се поистовећује са аритметичком средином статистичког скупа. Очекивана вредност је уствари просек случајне променљиве односно просечан очекивани исход.

Применимо наведени образац на пример бацања две коцке за игру:

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

Дакле, очекивана просечна вредност збира бројева на две коцке биће 7.

Поставимо питање у којој мери вредности случајне променљиве одступају од очекиване вредности. Ту меру нам показује дисперзија.

Дефиниција: Дисперзија (варијанса) (лат.: dispersio, расипање) случајне променљиве се означава са $D(X)$ једнака је $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(x-E(X))^2p_i$

Позитивна вредност квадратног корена из дисперзије зове се стандардна девијација: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

У примеру бацања 2 коцке дисперзија и стандардна девијација су:

X	p	Xp	x^2p
2	1/36	2/36	4/36
3	2/36	6/36	18/36
4	3/36	12/36	48/36
5	4/36	20/36	100/36
6	5/36	30/36	180/36
7	6/36	42/36	294/36
8	5/36	40/36	320/36
9	4/36	36/36	324/36
10	3/36	30/36	300/36
11	2/36	22/36	242/36
12	1/36	12/36	144/36
Σ		E(X)=7	$E(X^2)$=54,83

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2\approx 5{,}83$$

$$\sigma(X)\approx 2{,}42$$

Завршни део часа: 5 мин.

Домаћи задатак из збирке: 689, 691.

Редни број часа _____

Наставна јединица: Основни појмови математичке статистике
Тип часа: понављање и утврђивање
Облици рада: фронтални
Методе рада: дијалошка и монолошка
Наставна средства: збирка, рачунар, пројектор
Циљ часа: Оспособљавање ученика за примену знања, развијање логичког мишљења.
Образовни задатак: Усвајање основних појмова математичке статистике
Васпитни задатак: Код ученика се развија употреба математичког језика, прецизност и уредност
Функционални задатак: Развијање систематичности и аналитичког приступа у решавању проблема
Стандард уз наставну јединицу:
2.МА.1.4.4. Графички представља податке у облику дијаграма и табела, анализира податке и
њихову расподелу.
2.МА.1.4.5. Разуме појмове популације и узорка, израчунава и тумачи узорачку средину, медијану и мод.
Активност наставника: Даје основне смернице о раду, дефинише циљ часа, пружа помоћ ученицима приликом рада, врши избор активности и садржаја путем којих ће остваривати исходе, постизати стандарде и развијати компетенције, подстиче ученике на дискусију, усмерава дискусију ка постизању стандарда и исхода
Активност ученика: Учествују у дискусији, прате излагање наставника и постављају питања, самостално раде задатке које наставник постави, а затим анализирају исходе истих
Литература: Ивановић, Огњановић: Математика 4, Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа
Кључни појмови: популација, обележје, узорак

Уводни део часа: 5 мин.

Један од основних поступака статистике састоји се у томе да се испитивање неке масовне појаве (обележја) на целој популацији замени испитивањем те појаве на узорку и да се на основу особина тог узорка праве закључци и предвиђања за читаву популацију.

Скуп на коме се врши испитивање називамо **популација** (P). Популација је простор исхода.
Сваком елементу популације додељујемо са једнаком вероватноћом један реалан број, односно дефинишемо пресликавање $X : P \to R$. Пресликавање називамо **обележје** скупа P.
Обележје испитујемо на његовом подскупу који називамо **узорак**. Избор узорка је један од најважнијих задатака статистике.

Главни део часа: 35 мин.

Дефиниција: Ако посматрано обележје X има појединачне вредности $x_1, x_2, ..., x_n$ аритметичка средина се израчунава формулом

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Мод у ознаци M_o је вредност обележја која има највећу фреквенцију, тј. која се најчешће јавља. Постоје обележја која немају мод, као и обележја која имају више од једног мода.

Ако вредности обележја поређамо по величини, медијана, у ознаци M_e, је вредност обележја која се налази у средини. Уколико је број вредности непаран постоји једна медијана, а уколико је број вредности паран за медијану се може узети било која од две средње вредности, али се најчешће узима њихова аритметичка средина.

Узорачка дисперзија обележја је $\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2\right)$

Узорачко стандардно одступање је $\bar{S}$.

Задаци

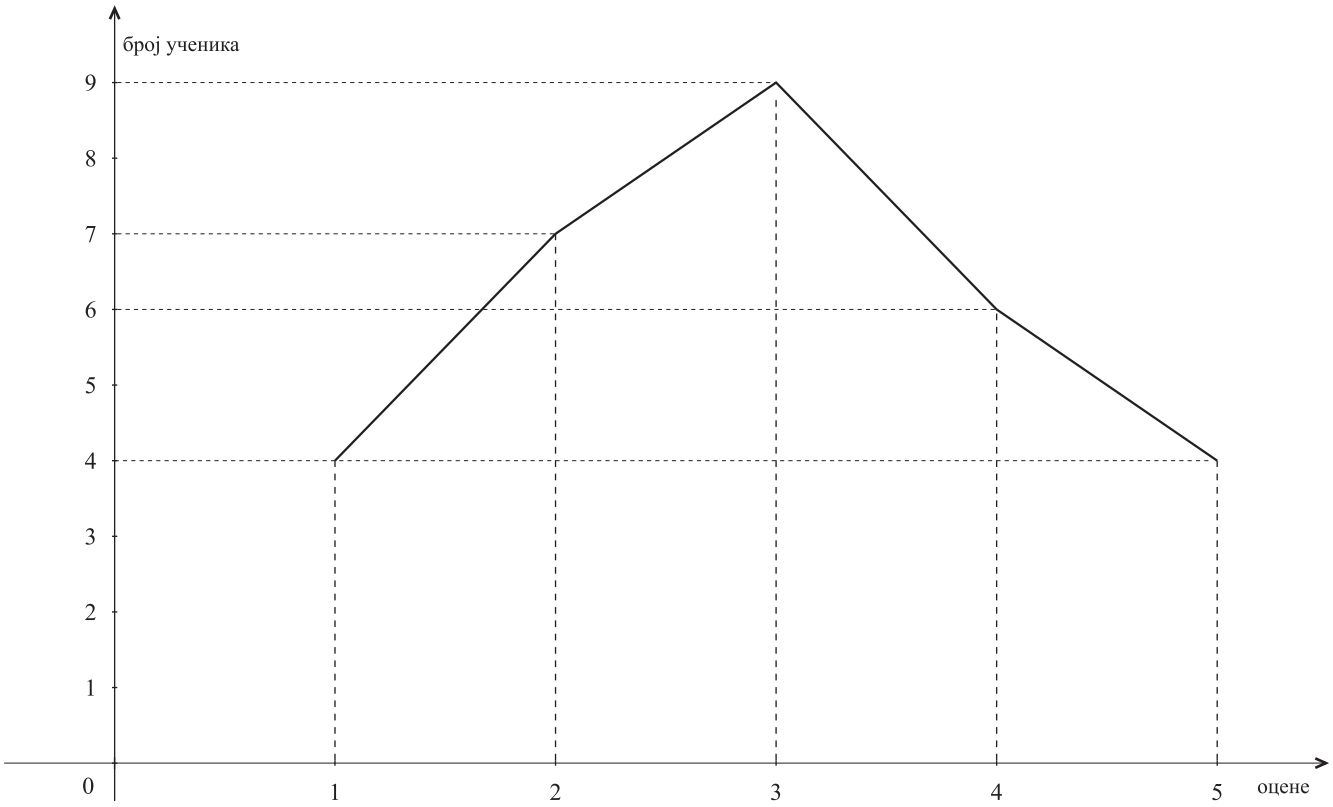
1. (Збирка, задатак 707) У једном одељењу има 30 ученика. Успех из математике на крају школске године приказан је следећом табелом:

Оцена	1	2	3	4	5
Број ученика	4	7	9	6	4

Израчунати $\bar{x}, \bar{S}^2, \bar{S}$, а затим нацртати полигон расподеле.

Решење: $\bar{x} = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 9 + 4\cdot 6 + 5\cdot 4}{30} = 2{,}97$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{30}\left(4(1-2{,}97)^2 + 7(2-2{,}97)^2 + 9(3-2{,}97)^2 + 6(4-2{,}97)^2 + 4(5-2{,}97)^2\right) = 1{,}49, \bar{S} = 1{,}22$$



2. (Збирка, задатак 709) Ради оцењивања просечне висине свих ученица једне гимназије измерена је висина у групи од 20 ученица и добијени су следећи подаци:

Висина	*153cm*	*154cm*	*157 cm*	*169 cm*	*170 cm*	*171 cm*	*173 cm*
Број ученика	*2*	*1*	*5*	*9*	*1*	*1*	*1*

Наћи просечну висину ученица, дисперзију и стандардно очекивање.

Решење: $\overline{x} = 164$ $\quad \overline{S}^2 = 0{,}00489$ $\quad \overline{S} = 0{,}07$

3. Оценити просечне оцене по предметима ученика, наћи дисперзију и стандардно очекивање и нацртати полигон.

Завршни део часа: 5 мин.

Разговор са ученицима на тему примене статистике.